L1 Luennolla määriteltiin kolme alkeisrivioperaatiota (eng. *elementary row operations*). Osoita, että kukin alkeisrivioperaatio voidaan kääntää (eli suorittaa takaperin).

L2 Olkoon $k \neq 0$. Tarkastellaan kahden yhtälön systeemiä

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2. \end{aligned}$$

(a) Näytä, että alkeisrivioperaatio kR_1 johtaa ekvivalenttiin systeemiin.

(b) Näytä, että alkeisrivioperaatio $R_2 + kR_1$ johtaa ekvivalenttiin systeemiin.

L3 Mitkä seuraavista yhtälöistä ovat lineaarisia?

(a) $\sqrt{2}x + \pi^2 y - (\log \pi^3)z = 1$, (b) $4y + e^z = 6$, (c) $x_1 + 2x_2 = 4 + x_4 - x_5$.

L4 Määrää seuraavien yhtälöiden ratkaisujoukot.

(a) $2x_1 + 3x_2 = 5$, (b) $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$.

L5 Muunna seuraava matriisi pelkistettyyn porrasmuotoon käyttämällä alkeisrivioperaatioita.

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ -3 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

L6 Ratkaise seuraava yhtälöryhmä käyttämällä Gauss-Jordanin eliminaatiota.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2w & + & 3x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ 3w & - & x & & & + & z & = & 1 \\ 3w & - & 4x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

M7 Näytä, että matriisit A ja B ovat riviekvivalentit:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esitä myös todistuksessa tarvittavat alkeisrivioperaatiot.

M8 Etsi seuraavien tasojen leikkaussuora:

$$4x + y - z = 0 \quad \text{ja} \quad 2x - y + 3z = 4.$$

M9 Olkoot $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ vektoreita $\mathbb{R}^n$:ssä ja asetetaan

$$\begin{aligned} S &= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}, \\ T &= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_m\}. \end{aligned}$$

Osoita, että $\mathrm{span}(S) \subset \mathrm{span}(T)$.

M10 Alla olevassa kuvassa ohuet viivat ovat pikselien reunoja ja paksut viivat kuvaavat röntgensäteitä. Pikselin sivun pituus on yksi. Ajatellaan, että kussakin pikselissä on tuntematon röntgensäteilyn vaimenemiskerroin x_j, $j = 1, 2, \ldots, 9$. (Voit numeroida pikselit haluamassasi järjestyksessä.) Kukin röntgensäde tuottaa mittausarvon

$$m_k = \sum_{j=1}^{9} \ell_{kj} x_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, 6,$$

missä ℓ_{kj} on sen matkan pituus, jonka säde numero k kulkee pikselissä numero j. (Voit numeroida myös röntgensäteet haluamassasi järjestyksessä.)

Kirjoita mittaus lineaariseksi yhtälöryhmäksi muuttujille $x_1, x_2, \ldots, x_9$. (Yhtälöitä tarvitaan siis 6 kappaletta.)