

**L1** Ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomat? Perustele.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

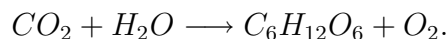
**L2** Ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomat? Perustele.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**L3** Laske seuraavat matriisitulot:

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

**L4** Kasvien yhteyttämisprosessissa hiilidioksidi ja vesi muuttuu glykoosiksi ja hapeksi. Etsi sopivat kertoimet reaktioyhtälöön



**L5** Laske tulo  $AB$  kahdella tavalla: suoraan matriisitulon määritelmästä sekä hyödyntämällä lohkorakennetta, kun

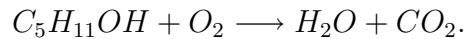
$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 5 & 4 & \\ -2 & 3 & 2 & \end{array} \right].$$

**L6** Muodosta  $6 \times 6$  matriisit  $A = [a_{ij}]$  ja  $B = [b_{ij}]$ , jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{jos } i \leq j, \\ 0, & \text{jos } i > j. \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } |i - j| \leq 1, \\ 0, & \text{jos } |i - j| > 1. \end{cases}$$

**M7** Matriisit  $A$  ja  $B$  *kommutoivat*, jos pätee  $AB = BA$ . Etsi sellaiset ehdot skalaareille  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , että matriisi  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  kommutoi matriisien  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ja  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  kanssa.

**M8** Etsi sopivat kertoimet reaktioyhtälöön



**M9** Oletetaan, että  $n \times n$ -matriisin  $A$  rivit ovat lineaarisesti riippumattomia  $\mathbb{R}^n$ :n vektoreina. Mikä on tällöin  $\text{rank}(A)$ ? Perustele.

**M10** Olkoon  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

(a) Osoita, että  $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ .

(b) Todista induktiolla, että  $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ , kun  $n \geq 1$ .