L1 Ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomat? Perustele.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

L2 Ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomat? Perustele.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L3 Laske seuraavat matriisitulot:

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

L4 Kasvien yhteyttämisprosessissa hiilidioksidi ja vesi muuttuu glykoosiksi ja hapeksi. Etsi sopivat kertoimet reaktioyhtälöön

$$CO_2 + H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2.$$

L5 Laske tulo AB kahdella tavalla: suoraan matriisitulon määritelmästä sekä hyödyntämällä lohkorakennetta, kun

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{r|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

L6 Muodosta 6×6 matriisit $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j, & \text{jos } i \le j, \\ 0, & \text{jos } i > j. \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } |i-j| \le 1, \\ 0, & \text{jos } |i-j| > 1. \end{cases}$$

M7 Matriisit A ja B *kommutoivat,* jos pätee $AB = BA$. Etsi sellaiset ehdot skalaareille $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, että matriisi $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ kommutoi matriisien $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ kanssa.

M8 Etsi sopivat kertoimet reaktioyhtälöön

$$C_5H_{11}OH + O_2 \longrightarrow H_2O + CO_2.$$

M9 Oletetaan, että $n \times n$-matriisin A rivit ovat lineaarisesti riippumattomia $\mathbb{R}^n$:n vektoreina. Mikä on tällöin $\operatorname{rank}(A)$? Perustele.

M10 Olkoon $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(a) Osoita, että $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$.

(b) Todista induktiolla, että $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, kun $n \geq 1$.