

**L1** Maatilalla on  $k$  kanaa ja  $p$  possua. Eläinten määristä tiedetään vain se, että jalkoja on yhteensä 38 ja päitä yhteensä 16.

- (a) Merkitse  $\vec{x} = [k \ p]^T$  ja kirjoita ongelma muotoon  $A\vec{x} = \vec{b}$ , missä  $A$  on  $2 \times 2$ -matriisi.
- (b) Laske (käsini, ei koneella) käänteismatriisi  $A^{-1}$ .
- (c) Ratkaise ongelma kaavalla  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ .

**L2** Olkoon  $B$  matriisi kokoa  $3 \times 3$ . Merkitään  $B'$ :lla sitä matriisia, joka syntyy matriisista  $B$  rivioperaation  $R_3 + 2R_1$  seurauksena. Muodosta sellainen matriisi  $C$ , että  $B' = CB$ . Onko  $C$  kääntyvä? Miksi?

**L3** Tarkista lohkomatriisien kertolaskulla, että seuraavat yhtälöt ovat tosia:

- (a) 
$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix},$$
- (b) 
$$\begin{bmatrix} I & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - BC)^{-1} & -(I - BC)^{-1}B \\ -C(I - BC)^{-1} & I + C(I - BC)^{-1}B \end{bmatrix}.$$

(Voit olettaa, että kaikki tarvittavat käänteismatriisit ovat olemassa.)

**L4** Matriisi  $A$  on *vinosymmetrinen*, jos  $A^T = -A$ .

- (a) Osoita, että vinosymmetrisen matriisin diagonaali-alkiot ovat nollia.
- (b) Olkoon  $A$  neliömatriisi. Näytä, että  $A - A^T$  on vinosymmetrinen.
- (c) Olkoon  $A$  neliömatriisi. Todista, että  $A$  voidaan kirjoittaa summana symmetrisestä ja vinosymmetrisestä matriisista.

Kirjoita matriisi  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  kyseiseen muotoon.

**L5** Olkoon  $A$  kääntyvä matriisi.

- (a) Osoita, että  $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ , kun  $c \in \mathbb{R}$  ja  $c \neq 0$ .
- (b) Osoita, että  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

**L6** Laske seuraavien matriisien käänteismatriisit Gauss-Jordanin menetelmällä.

- (a)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$
- (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

- M7** (a) Todista: jos  $A$  on kääntyvä matriisi ja  $AB = 0$ , niin välttämättä  $B = 0$ .  
(b) Konstruoi (ei-kääntyvä)  $3 \times 3$ -matriisi  $A$  ja matriisi  $B \neq 0$ , joille  $AB = 0$ .

**M8** Todista, että  $(AB)^T = B^T A^T$ .

**M9** Laske seuraavien matriisien käänteismatriisit Gauss-Jordanin menetelmällä. Tarkista tulos kertolaskulla.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**M10** Neliömatriisi  $A$  on *idempotentti*, jos  $A^2 = A$ .

- (a) Etsi kolme idempotenttia  $2 \times 2$ -matriisia.  
(b) Todista, että ainoa kääntyvä idempotentti  $n \times n$ -matriisi on identiteettimatriisi.