L1 Olkoon A yläkolmiomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

(a) Näytä, että $\det(A) = adf$ eli diagonaalialkioiden tulo.

(b) Osoita, että A:n diagonaalialkiot ovat sen ominaisarvot.

L2 Neliömatriisit A ja B ovat *similaariset*, jos on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P, että $P^{-1}AP = B$. Tällöin merkitään $A \sim B$.
Osoita, että similaarisuusrelaatiolle pätee

(a) $A \sim A$,

(b) jos $A \sim B$, niin $B \sim A$,

(c) jos $A \sim B$ ja $B \sim C$, niin $A \sim C$.

Kohdat (a)–(c) toteuttavaa relaatiota kutsutaan *ekvivalenssirelaatioksi.*

L3 Näytä, että kohtien (a) ja (b) vektorijoukot $\mathcal{B}$ ovat ortogonaaliset. Etsi ortogonaaliprojektioiden avulla vektorin $\vec{w}$ koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$.

(a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ (b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

L4 Näytä, että λ on matriisin A ominaisarvo ja etsi vastaava ominaisvektori, kun

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \lambda = -2,$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = 2.$

L5 Laske kumpikin seuraavista determinanteista kahdella tavalla: kehittämällä ensimmäisen *sarakkeen* mukaan ja kehittämällä ensimmäisen *rivin* mukaan.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

L6 Määrää matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot etsimällä karakteristisen polynomin juuret. Anna kanta kunkin ominaisarvon ominaisavaruudelle.

M7 Osoita, että A ja B eivät ole similaariset, kun

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

M8 Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Etsi A:n ominaisarvot.

(b) Etsi A:n ominaisvektorit.

(c) Kirjoita A muotoon $A = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalinen.

M9 Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Etsi A:n ominaisarvot ja ominaisvektorit.

(b) Kirjoita A muotoon $A = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalinen.

(c) Laske potenssi A^{2008} käyttäen hyväksi (b)-kohtaa.

M10 Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Laske A:n karakteristinen polynomi.

(b) Etsi A:n ominaisarvot.

(c) Valitse kanta kunkin ominaisarvon ominaisavaruudelle.