(1) Syötä seuraavat matriisit Matlabiin ja tutki niiden määräämiä lineaarikuvauksia ohjelman `kissa.m` avulla (ohjelman saat kurssin kotisivulta).

(a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Kokeile eri arvoja θ:lle kohdassa (d). Huomaatko yhteyden laskuharjoituksen 2 tehtävään M10?

(2) Edellisen tehtävän (b)-kohdan matriisi voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Tarkista tämä kaava Matlabilla. Tutki yhtälön oikean puolen kolmea matriisia ohjelmalla `kissa.m`. Selvennä itsellesi seuraava tulkinta matriisin A määräämästä lineaarikuvauksesta: ensin vaihdetaan koordinaatistoa, sitten venytetään ensimmäisen koordinaatin suuntaan kertoimella 2 ja lopuksi palataan alkuperäisiin koordinaatteihin.

(3) Tutki Matlabia ja kurssilla opittua teoriaa hyväksi käyttäen, muodostavatko vektorit

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan.

(4) Tarkastellaan kemiallista reaktiota

$$x\mathrm{C_2H_2Cl_4} + y\mathrm{Ca(OH)_2} \longrightarrow z\mathrm{C_2HCl_3} + v\mathrm{Ca\,Cl_2} + w\mathrm{H_2O},$$

missä kertoimet x, y, z, v, w ovat tuntemattomia. Muodosta Matlabissa lineaarista yhtälöryhmää vastaava 5×5 kerroinmatriisi A ja oikea puoli $b \in \mathbb{R}^5$.

Tiedämme, että ratkaisu on määrätty vakiota vaille (voimme vaikka tuplata kaikkien aineiden määrän, ja reaktioyhtälö pysyy voimassa), eli yksi vapaa parametri pitäisi jäädä. Laske tämän toteamiseksi A:n aste komennolla `rank(A)` (pitäisi olla 4, miksi?).

Ongelman ratkaisemiseksi riittää löytää yksi nollasta poikkeava vektori aliavaruudesta null(A) (miksi?). Tämän voit tehdä komennolla `v=null(A)`.

Koska ratkaisuvektorin alkioiden pitää olla kokonaislukuja (miksi?), on järkevää käyttää komentoa `v=null(A,'r')`. Selvitä tämä asia itsellesi lukemalla Matlabin dokumentaatiota komennolla `help null`.

(5) Tarkastellaan neljän operaattorin matkapuhelinmarkkinoita. (Operaattorien nimet on muutettu, eikä tehtävässä esitetyllä taloudellisella datalla ole yhteyttä reaalimaailmaan.) Merkitään vaakavektorilla $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ markkinaosuuksia seuraavasti:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{TNT:n markkinaosuus,} \\ x_2 &= \text{Tomeran markkinaosuus,} \\ x_3 &= \text{Kaviolinjan markkinaosuus,} \\ x_4 &= \text{Orangin markkinaosuus.} \end{aligned}$$

Jokainen x:n komponentti toteuttaa $0 \leq x_j \leq 1$, ja lisäksi pätee $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, koska nämä neljä yhtiötä kattavat koko markkinan.

Oletetaan nyt, että kunakin päivänä

- TNT:n asiakas vaihtaa Tomeralle todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$, Kaviolinjalle todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$ ja Orangille todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$.
- Tomeran asiakas vaihtaa TNT:lle todennäköisyydellä 0, Kaviolinjalle todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ ja Orangille todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$. Siten asiakas pysyy Tomeralla todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.
- Kaviolinjan asiakas vaihtaa TNT:lle todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$, Tomeralle todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ ja Orangille todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$. Asiakas pysyy Kaviolinjalla todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$.
- Orangin asiakas vaihtaa TNT:lle todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$ ja pysyy Orangilla todennäköisyydellä $\frac{9}{10}$.

Määritellään todennäköisyydet p_{ij} seuraavasti:

$$p_{ij} = \text{todennäköisyys vaihtaa operaattorista } i \text{ operaattoriin } j.$$

Kokoa Matlabissa matriisi $P = [p_{ij}]$. Tarkista Matlabilla, että kunkin rivin alkioiden summa on yksi (käytä transpoosia ja komentoa `sum`). Tällaista matriisia kutsutaan *stokastiseksi.*

Oletetaan, että eräänä päivänä markkinaosuuksiksi mitataan $x^{(0)} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, eli kaikilla yhtiöillä on saman verran asiakkaita. Tällöin voimme laskea seuraavan päivän markkinaosuudet kaavalla

$$x^{(1)} = x^{(0)} P.$$

(Miksi?) Edelleen, markkinatilanne kahden päivän kuluttua on $x^{(2)} = x^{(1)} P = x^{(0)} PP$, ja n:n päivän kuluttua siis $x^{(2)} = x^{(1)} P = x^{(0)} P^n$. Laske Matlabilla jonon

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$$

jäseniä. Mitä huomaat? (Kokeile komentoa `format long`, niin näet useamman merkitsevän numeron.)

Tutki markkinaosuuksien kehitystä myös alkuarvolla $x^{(0)} = [0, 1, 0, 0]$, jossa kaikki asiakkaat ovat Tomeralla. Vertaa lopputuloksia kahden kuukauden päästä kummallakin alkuarvolla.