5.3.2 Derivaatan muunnos

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = (\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)$$

sillä jos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,d\omega =$$

niin

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,d\omega\right) =$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(F(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)d\omega =$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{j}\omega)\,F(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,d\omega$$

Mutta miksi ja milloin voi derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihtaa? Kirjassa ei ole vastausta.

Perustelu toisin: mitä on $\mathcal{F}\{f'(t)\}$?

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \Big[f(t)\, e^{-j\omega t} \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} (-j\omega)\, dt =$$

$$= (j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = (j\omega)\, F(j\omega)$$

koska

$$\Big[f(t)\, e^{-j\omega t} \Big]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

koska

$$\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$$

koska / kun Teoreeman 5.1 ehto (a) toteutuu.