

MAT-20451 Fourier'n menetelmät

Harjoitus 5 (viikko 7, 2012)

1 a) Harjoituksen 4 tehtävässä 8 saatiin 'on-off' -pulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (-T \leq t < 0) \\ -A & (0 \leq t < T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

Fourier-muunnos $AT^2 j\omega \operatorname{sinc}^2(\omega T/2)$. Piirrä kuvaaja toiselle 'on-off' -pulssille

$$g(t) = \begin{cases} A/T & (-T < t < 0) \\ -A/T & (0 < t < T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

ja totea sen Fourier-muunnos (lineaarisuuden nojalla).

b) Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f'(t)\} = (j\omega)F(j\omega)$ (kalvo Aikaderivaatta) ja siis myös

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}\{f'(t)\} \quad \text{kun } \omega \neq 0.$$

Muodosta tällä kaavalla a-kohdan tuloksesta Fourier-muunnos kolmiopulssille eli *deltapulssille* (piirrä pulssin kuva!)

$$f(t) = \begin{cases} (A/T)t + A & (-T \leq t \leq 0) \\ (-A/T)t + A & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases} \quad (\text{Kirjan tehtävä 3 / 5.2.4.})$$

c) Tarkista erikseen määritelmästä, että vastaus pätee myös, kun $\omega = 0$.

2. Muodosta Fourier-muunnos tehtävän 1b kolmiopulssille suoraan määritelmää käyttäen.

Vihje 1: Tässä
$$F(j\omega) = \int_{-T}^T f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-T}^T f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Vihje 2: Integroitava parillinen tai pariton ja reaalinen.

Vihje 3: $\cos x = 1 - 2 \sin^2(x/2)$.

3 a) Tasapulssin esitys Fourier-integraalina (muunnos ja käänteismuunnos sisäkkäin)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (5.8)$$

sievenee, kun sisempi integraali korvataan valmiiksi lasketulla tasapulssin Fourier-muunnoksella. Tee tämä sievennys!

b) Sievennä edelleen reaaliseksi a-kohdassa saadun integraalin liikiarvo

$$f(t) \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t} \operatorname{sinc}(\omega) d\omega$$

Vihje: Parillisuus, parittomuus ja äärellinen origokeskinen väli tässäkin.

c) Tee vastaava a- ja b-kohtien yhdistelmä tehtävän 1a 'on-off' -pulssin $f(t)$ integraaliesitykselle eli sievennä $f(t)$:n integraaliesityksen vastaava liikiarvo mahdollisimman pitkälle.

(Kommentti: Jaksollisten funktioiden puolella $f(t)$:tä esittää Fourier-sarja. Sarjan N :s osasumma on liikiarvo, jossa ovat mukana vain sarjan N ensimmäistä termiä ja niiden taajuudet, kompleksiversiossa myös vastaavat negatiiviset taajuudet. Nyt ovat vastaavasti mukana vain taajuudet $-\omega_0 < \omega < \omega_0$ jaksottoman funktion integraaliesityksen (5.8) liikiarvossa. Esimerkkeinä olevien tasapulssin ja 'on-off' -pulssin kohdalla näkyvät sekä liikiarvon paraneminen ω_0 :aa kasvatettaessa että Gibbsin ilmiö pc-tehtävissä 7 ja 8, samoin kirjan kuvassa Figure 5.4 tasapulssin osalta.)

4. Johda Fourier-muunnos

a) kaksoistasapulssille
(teht. 13 / 5.3.6)

b) 'off-on-off' -pulssille
(teht. 5 / 5.2.4)

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (1 \leq |t| \leq 2) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -2) \\ -1 & (-2 \leq t < -1) \\ 1 & (-1 \leq t \leq 1) \\ -1 & (1 < t \leq 2) \\ 0 & (t > 2) \end{cases}$$

tasapulssin muunnoksesta lineaarisuuden avulla. Näe tilanteet kahden origokeskisen tasapulssin erotuksena tai summana. Piirrä kuvat avuksesi. (Kahden erotus on määritelmän mukaan summa ensimmäinen plus (-1)-kertaa-jälkimmäinen. Siksi soveltuu lineaarisuus.)

Jatkuu kolmannella sivulla!

5. Johda tasapulssin muunnoksesta lineaarisuuden avulla Fourier-muunnos kaksoistasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (\tau - T \leq |t| \leq \tau + T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases} \quad (0 < T < \tau)$$

- a) kahden origokeskisen tasapulssin erotuksena (kuten tehtävässä 4a),
 b) kahden aikasiirretyn tasapulssin summana. (Kirjan tehtävä 18 / 5.4.3).
 c) Johda a)-kohdan tulos samaksi kuin b)-kohdan tulos (tai päinvastoin), kun $\omega \neq 0$.
 d) Tarkista tulokset samoiksi myös, kun $\omega = 0$.

Vihje: $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos(a) \sin(b)$.

6 a) Johda tehtävän 4b pulssille Fourier-muunnos tasapulssin muunnoksesta käyttäen lineaarisuuden lisäksi myös aikasiirto-ominaisuutta.

b) Johda a)-kohdan tuloksesi edelleen samaksi kuin tehtävässä 4b saatu $4\text{sinc}(\omega) - 4\text{sinc}(2\omega)$, kun $\omega \neq 0$. — Tarkista tulosten samuus, kun $\omega = 0$.

7. Aja Maplella (kuvia tehtävään 3ab ja kirjan kuvasarjaan Figure 5.4):

```
f:=piecewise(abs(t)<=1,1);
plot(f, t=-2..2);
wo:=32;
fint:=...; (Täydennä integointi 3b:n sievennyksen mukaiseksi.)
plot({f,fint},t=-3..3);
```

Kokeile myös $\omega_0 = 64$ ja $\omega_0 = \infty$. (Nyt on sen verran hitaampaa, että emme tee animaatiota tarkkuuden paranemisesta.)

(Kommentti: Maple ilmaisee integointituloksen käyttäen funktiota

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$$

jota ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla, samoin kaava (5.12) kirjassa. Emme anna tämän häiritä, syntyhän kuvaa tuloksesta. Kaavasta (5.12) puuttuu $1/\pi$ kuten näet Maplen tuloksesta. Maplen tulos on oikein päätellen kuvien yhteensopivuudesta.)

8. Aja Maplella tehtävän 7 kaikki komennot muunnettuina sopivasti tehtävien 1a ja 3c 'on-off'-pulssin $f(t)$ mukaisiksi tapauksessa $A = 1$ ja $T = 1$:

```
f:=piecewise(...); (Täydennä 'on-off'-pulssiksi.)
plot(f, t=-2..2);
wo:=32;
fint:=...; (Täydennä integointi 3c:n sievennyksen mukaiseksi.)
plot({f,fint},t=-3..3);
```

(Kommentin kommentti: "Nyt ovat vastaavasti mukana vain taajuudet $-\omega_0 < \omega < \omega_0$ jaksottoman funktion integraaliesityksen (5.8) likiarvossa."

Puhutaan sujuvasti jaksottoman funktion taajuuksista ω , myös kalvolla **Jatkuva spektri**. Mitä tarkoittaa *taajuus* jaksottoman funktion tapauksessa? Yllätys, yllätys: se ei tarkoita mitään! Sehän tarkoittaisi jotain vasta sitten, kun joku määritteli sille sisällön.

Tilanne on saman tapainen kuin satunnaismuuttujan todennäköisyystiheyden tai objektin massatiheyden tai kentän energiatiheyden kanssa. Mitä ovat *satunnaisuus* tai *todennäköisyys* tai *massa* tai *energia* ja/tai niiden *tiheys*? Mitä ovat *reaaliluvut* ja *kompleksiluvut* tai *luvut* ylipäänsä? Puhutaan sujuvasti asioista, joita ei ole tarkasti määritelty. Ja opitaankin niistä jotain — toivottavasti.

Puhutaan todennäköisyysjakaumasta ja taajuushajotelmasta. Asoiden samankaltaisuus ilmenee siinäkin, että termin *taajuushajotelma* (frequency spectrum) kanssa rinnakkain käytetään myös sanontaa *taajuusjakauma* (frequency ditribution). Nuo kaikki käsitteet ovat ehkä pelkkiä mielikuvituksen tuotteita, mutta hyödyllisiä silti — tai juuri siksi.)