MAT-20450 Fourier'n menetelmät Tentti 30.11.2006

- **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
- **Kirjoita papereihin nimesi, numerosi ja koulutusohjelmasi.**

1. Funktiolle $f(t) = |\cos(t)|$ tunnetaan kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} e^{j2nt},$$

a) Muodosta tästä kompleksinen Fourier-sarja funktiolle $g(x) = |\sin(x)|$ yhtälön $\sin(x) = \cos(x-\pi/2)$ avulla. [4 pistettä]

Ohje: Muuttujan vaihto $t = x-\pi/2$ funktioon ja sen sarjaan näyttää ensi vilkaisulla muuttavan sarjan pois Fourier-sarjan rakenteesta. Varmista **a**-kohdassa, että näin ei kuitenkaan käy, sieventämällä tulos mahdollisimman pitkälle ja niin, että sarjan kertoimet c_n ja ω näkyvät. Totea ne!

b) Tuotta(isi)vatko **a**-kohdan sarjan osasummat Gibbsin ilmiön pisteessä $x = \pi$? Perustele. [2 pistettä]

2 a) Muodosta tehtävässä 1 annetusta funktion $f(t)$ Fourier-sarjan trigonometrinen versio

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

missä

$$\tfrac{1}{2}a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = j(c_n - c_n^*) \qquad (n \geq 1)$$

b) Olisiko (jos muodostettaisiin) tehtävän 1 funktion $f(t)$ Fourier-sarjasta termeittäin derivoimalla saatava sarja derivaatan $f'(t)$ Fourier-sarja? Perustele.

3. Olkoon funktiolla $f(t)$ Fourier-muunnos määritelmän mukaisena:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt, \quad \text{missä} \quad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t.$$

Johda Fourier-muunnos funtktiolle $f(at)$, kun $a > 0$.

4. Tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \le T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases}$$

tiedetään Fourier-muunnos $F(\mathrm{j}\omega) = 2AT\mathrm{sinc}(\omega T)$. Johda muunnos

a) tasapulssille $H(t) - H(t - T)$,

b) ikkunoidulle sinille $x(t) = \cos(\omega_0 t)\,[H(t) - H(t - T)]$.

Apuna: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-\mathrm{j}\omega\tau}F(\mathrm{j}\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{\mathrm{j}at}f(t)\} = F(\mathrm{j}(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(\mathrm{j}t)\} = 2\pi f(-\omega)$.

(*Kysymys:* Pulssista $\cos(\omega_0 t)$ otetaan näytteitä tasavälein äärellisellä aikavälillä (käytännössä), sanokaamme välillä $[0, T]$, kun viimeinen näyte otetaan hetkellä T. Näytteiden diskreetin Fourier-muunnoksen itseisarvot tuottavat kauniin kuvan piikkeineen kulmataajuuden ω_0 kohdalla. Mutta mitä tuo kuva ja DFT-itseisarvot esittävät, kun pulssilla $\cos(\omega_0 t)$ ei ole teoreettista Fourier-muunnosta?

Vastaus: Näytteet otettiin todellisuudessa tehtävän 4**b** signaalista.)