

1. Mitkä seuraavista differentiaaliyhtälöistä ovat lineaarisia, mitkä epälineaarisia? Mitkä lineaarisista yhtälöistä ovat homogeenisia? Tuntematon on  $y = y(t)$ .

(a)  $y'' = g$ ,

(b)  $y' = -k\sqrt{y}$ ,

(c)  $my' = mg - by^2$ ,

(d)  $Ly' + Ry = E(t)$ ,

(e)  $my'' + ky = 0$ ,

(f)  $Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = E'(t)$ .

2. Näytä derivoimalla, että annetut funktiot  $y$  ovat vastaavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja.

(a)  $y' = y + 1$ ,  $y(t) = Ce^t - 1$ ,

(b)  $y' = -\frac{t}{y}$ ,  $y(t) = \sqrt{a^2 - t^2}$ ,  $|x| < a$ ,

(c)  $y'' + y = 0$ ,  $y(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin(t)$ .

3. Differentiaaliyhtälöllä  $y' = y$  on ratkaisuna  $y(t) = e^t$ . Osoita, että sen jokainen muu ratkaisu poikkeaa tästä vain kerrannaisella vakiolla. Sijoita tätä varten yrite  $y = u(t)e^t$  differentiaaliyhtälöön ja johda ehto funktiolle  $u$ .

4. Etsi differentiaaliyhtälösystemin

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t), \\ x_2'(t) = 2x_2(t), \end{cases}$$

yleinen ratkaisu. Määritä se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2.$$

Piirrä ratkaisukäyrä tasoon  $t$ :n funktiona.

5. Muunna seuraavat toisen asteen differentiaaliyhtälöt ekvivalenteiksi ensimmäisen asteen systeemeiksi kirjoittamalla  $x_1 = y$  ja  $x_2 = y'$ . Etsi myös vastaavat alkuehdot suureille  $x_1(0)$  ja  $x_2(0)$ .

(a)

$$y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

(b)

$$y'' + ty' = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

6. Ratkaise edellisen tehtävän differentiaaliyhtälöt alkuarvoineen käyttäen tarvittaessa ekvivalenttia systeemiä apuna.