MAT-33500 Differentiaaliyhtälöt, kevät 2006 Laskuharjoitus 2 (22.-23.2.2006)

Samuli Siltanen, Seppo Pajunen ja Juho Linna

1. Hahmottele seuraavien matriisien määrittelemät vektorikentät:

$$(a)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad(b)\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\qquad(c)\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\qquad(d)\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

   Kokeile myös Matlab-funktiota vectorfield_plot.m, jonka saat kurssin verkkosivulta.

2. Ratkaise tehtävän 1 matriiseja (a) ja (b) vastaavat alkuarvo-ongelmat

$$x' = Ax, \qquad x(0) = [k_1, k_2]^T.$$

3. Olkoon matriisi A kuten tehtävässä 1(c). Etsi sellaiset vakiot a ja b, että käyrä $x(t) = [a\cos t,\, b\sin t]^T$ ratkaisee alkuarvo-ongelman

$$x' = Ax, \qquad x(0) = [1, 0]^T.$$

4. Olkoon $A = [a_{ij}]$ diagonaalinen $n \times n$ -matriisi, eli $a_{ij} = 0$ kun $i \neq j$. Todista, että differentiaaliyhtälöllä

$$x' = Ax$$

   on yksikäsitteinen ratkaisu millä tahansa alkuarvolla $x(0) = b \in \mathbb{R}^n$.

5. Osoita, että $n \times n$ -matriisin A ydin

$$\mathrm{Ker}\, A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

   on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus.

6. Diagonalisoi matriisi

$$A = \begin{bmatrix}5&3\\3&5\end{bmatrix}.$$

   Toisin sanoen, etsi A:n ominaisarvot λ_1 ja λ_2 ja esitä A muodossa

$$A = Q^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}Q.$$