MAT-33500 Differentiaaliyhtälöt, kevät 2006 Laskuharjoitus 3 (1.-2.3.2006)

Samuli Siltanen, Seppo Pajunen ja Juho Linna

1. Tarkista, että käyrä

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2ae^t \\ -2ae^t + be^{2t} \\ ae^t + ce^{-t} \end{bmatrix}$$

on seuraavan differentiaaliyhtälösysteemin ratkaisu:

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$x' = Ax, \qquad x(0) = [3 \quad 0]^T, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$x' = Ax, \qquad x(0) = [0 \quad -b \quad b]^T, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Etsi sellainen 2×2-matriisi A, että käyrä

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

on yhtälön $x' = Ax$ ratkaisu.

5. Oletetaan, että $n \times n$-matriisilla A on n reaalista, erisuurta ominaisarvoa. Anna sellainen ehto ominaisarvoille, että jokainen yhtälön $x' = Ax$ ratkaisu toteuttaa $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ jos ja vain jos tämä ehto on voimassa.

6. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$x' = Ax, \qquad x(0) = [3 \quad -9]^T, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja hahmottele yhtälön faasikuva.