Samuli Siltanen, Seppo Pajunen ja Juho Linna

Tähän harjoitukseen liittyvä teoria löytyy Hirschin ja Smalen kirjasta (luvut 3§1F ja 4§1). Samat asiat esitetään myös suomenkielisessä luentomateriaalissa, jonka saa kurssin kotisivulta pdf-muodossa.

1. Tarkastellaan lineaarikuvausta $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jonka matriisi standardikannassa on
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Etsi yksiulotteinen aliavaruus $E \subset \mathbb{R}^3$ ja kaksiulotteinen aliavaruus $F \subset \mathbb{R}^3$, jotka ovat invariantteja kuvaukselle T (eli $T(E) \subset E$ ja $T(E) \subset E$). Valitse E:lle kanta $\{e_1\}$ ja F:lle kanta $\{f_1, f_2\}$.

2. Olkoon $F \subset \mathbb{C}^2$ se aliavaruus, jonka virittää vektori $(1, i)$. Näytä, että F ei ole invariantti konjugoinnin suhteen (ja siten ei voi olla minkään reaalisen aliavaruuden kompleksifiointi). Määritä $F_\mathbb{R}$ ja $(F_\mathbb{R})_\mathbb{C}$.

3. Olkoot $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $F \subset \mathbb{C}^n$ aliavaruuksia. Näytä, että $\dim E = \dim E_\mathbb{C}$. Kumpi seuraavista epäyhtälöistä on aina tosi: $\dim F \leq \dim F_\mathbb{R}$ vai $\dim F \geq \dim F_\mathbb{R}$?

4. Mikä seuraavista relaatioista pätee mielivaltaiselle aliavaruudelle $F \subset \mathbb{C}^2$:

   (i) $F \subset (F_\mathbb{R})_\mathbb{C}$,

   (ii) $F \supset (F_\mathbb{R})_\mathbb{C}$,

   (iii) $F = (F_\mathbb{R})_\mathbb{C}$?