MAT-33500 Differentiaaliyhtälöt, kevät 2006 Laskuharjoitus 6 (29.-30.3.2006)

Samuli Siltanen, Seppo Pajunen ja Juho Linna

Tähän harjoitukseen liittyvä teoria löytyy Hirschin ja Smalen kirjasta (luvut 5§1 ja 5§2) sekä matematiikan peruskurssien oppikirjoista.

$\mathbb{R}^n$:n normi on mikä tahansa funktio $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdot

(i) $N(x) \geq 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$, ja $N(x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0$;

(ii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Määritellään $\|x\|_p = (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p}$ kaikilla $1 \leq p < \infty$ sekä $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$. Lisäksi määritellään $\mathcal{B}$-normi seuraavasti: olkoon $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ kanta avaruudelle $\mathbb{R}^n$. Asetetaan

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = (t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{1/2}, \qquad \text{jos } x = \sum_{j=i}^n t_j f_j.$$

1. Näytä, että $\|\cdot\|_1$ on $\mathbb{R}^2$:n normi.
2. Näytä, että $\|\cdot\|_\infty$ on $\mathbb{R}^n$:n normi.
3. Hahmottele avaruuden $\mathbb{R}^2$ yksikköympyrät $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x\|_p = 1\}$ parametrin p arvoilla $1, 2, 3$ ja ∞.
4. Etsi suurin $A > 0$ ja pienin $B > 0$, joille pätee

$$A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$$

   kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. (Vastaus on $A = 1$ ja $B = \sqrt{n}$, mutta miksi?)
5. Laske vektorin $[1 \quad 1]^T \in \mathbb{R}^2$ pituus, kun normi on
   (a) $\|\cdot\|_1$;
   (b) $\|\cdot\|_2$;
   (c) $\|\cdot\|_3$;
   (d) $\|\cdot\|_\infty$;
   (e) $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ kannassa $\mathcal{B} = \{[1 \quad 2]^T, [2 \quad 2]^T\}$.