Samuli Siltanen, Seppo Pajunen ja Juho Linna

1. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ aliavaruus ja $N : E \to \mathbb{R}$ normi. Osoita, että on olemassa normi $\tilde{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jonka rajoittuma N on.
(Vihje: kirjoita $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ ja aseta $\tilde{N}(x) = N(y) + |z|$, missä $y \in E$ ja $z \in F$.)

2. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ aliavaruus. Osoita, että E on suljettu joukko.
(Vihje: Valitse sellainen $\mathbb{R}^n$:n kanta $\{e_1, \ldots, e_n\}$, että vektorit $e_1, \ldots, e_m$ virittävät aliavaruuden E. Tarkastele koordinaattien suppenemista.)

3. Olkoon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus. Osoita, että T:n operaattorinormi voidaan laskea kaavalla
$$\|T\| = \text{ pienin yläraja joukolle } \{\frac{|Tx|}{|x|} \mid x \neq 0\}.$$

4. Laske seuraavien $\mathbb{R}^2$:n lineaarikuvausten operaattorinormit:
$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 10 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$