Samuli Siltanen

1 Avaruuksien ja lineaarikuvausten suora summa

Tämä asia löytyy myös Hirschin ja Smalen kirjasta, luku 3, pykälä 1F.

Olkoon E vektoriavaruus, esimerkiksi $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus, ja olkoot $E_1, E_2, \ldots, E_r$ aliavaruuksia E:ssä. Sanomme, että E on aliavaruuksien E_i *suora summa*, mikäli jokainen $x \in E$ on kirjoitettavissa yksikäsitteisellä tavalla muotoon

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r, \qquad x_i \in E_i \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, r.$$

Tällöin merkitsemme

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_r = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i.$$

Olkoot $T : E \to E$ ja $T_i : E_i \to E_i$ lineaarikuvauksia kaikilla $i = 1, 2, \ldots, r$. Sanomme, että T on lineaarikuvausten T_i suora summa, mikäli

1. pätee $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_r$,
2. kukin avaruus E_i on invariantti kuvaukselle T (eli $T(E_i) \subset E_i$),
3. $Tx = T_i x$ mikäli $x \in E_i$.

Tällöin merkitsemme $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_r$.

Valitaan kuhunkin aliavaruuteen E_i kanta ja merkitään lineaarikuvauksen T_i matriisia valitussa kannassa A_i:llä. Silloin saamme kannan E:lle ottamalla mukaan kaikki aliavaruuksien E_i kanta-alkiot. Tässä kannassa T:n matriisi on diagonaalinen lohkomatriisi:

$$A = \text{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_r\} = \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & A_r \end{bmatrix}$$

Matriisit A_i sijaitsevat isossa matriisissa A kulmittain, ja kaikki merkitsemättömät matriisialkiot A:ssa ovat nollia. Näin lineaarikuvaus T voidaan esittää toisistaan täysin riippumattomien osakuvausten T_i avulla.

Suorille summille pätee:

$$\det(T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_r) = (\det T_1)(\det T_2) \ldots (\det T_r),$$

mikä matriisien avulla ilmaistuna saa muodon

$$\det(A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_r) = (\det A_1)(\det A_2) \ldots (\det A_r).$$

Myös:

$$\mathrm{Tr}(T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_r) = \mathrm{Tr}(T_1) + \mathrm{Tr}(T_2) + \ldots + \mathrm{Tr}(T_r),$$

ja vastaavasti matriiseille.

2 Kompleksiset vektoriavaruudet

Tämä asia löytyy myös Hirschin ja Smalen kirjasta, luku 4, pykälä 1.

Määrittelemme kompleksifioidut vektoriavaruudet ymmärtääksemme paremmin matriiseja, joilla on kompleksisia ominaisarvoja.

Ensinnäkin, tutun avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompleksifioitu versio on nimeltään $\mathbb{C}^n$ ja se määritellään yksinkertaisesti näin:

$$\mathbb{C}^n = \{[z_1, z_2, \ldots, z_n]^T \mid z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Avaruuden $\mathbb{C}^n$ alkiot ovat siis vektoreita, joiden alkiot voivat olla kompleksisia. Vektorien yhteenlasku on aivan samanlaista kuin $\mathbb{R}^n$:ssä, ja skalaarilla $\lambda \in \mathbb{C}$ kertominen määritellään ilmeisellä tavalla:

$$\lambda[z_1, z_2, \ldots, z_n]^T = [\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n]^T.$$

Huomaa, että $\mathbb{R}^n$ voidaan nähdä luonnollisella tavalla $\mathbb{C}^n$:n osajoukkona: $\mathbb{R}^n$ koostuu niistä $\mathbb{C}^n$:n vektoreista, joiden kaikki koordinaatit ovat reaalisia.

Aiemmin $\mathbb{R}^n$:n tapauksessa määritellyt käsitteet aliavaruus, lineaarikuvaus, determinantti, kanta, koordinaatit, ydin ja kuva yleistyvät $\mathbb{C}^n$:n tapaukseen yksinkertaisesti vaihtamalla reaalisten skalaarien tilalle kompleksiset skalaarit.

Määritelmä: *kompleksinen vektoriavaruus* on $\mathbb{C}^n$:n aliavaruus.

Olkoon nyt $T : F \to F$ lineaarikuvaus kompleksisessa vektoriavaruudessa $F \subset \mathbb{C}^n$. Skalaari $\lambda \in \mathbb{C}$ on T:n ominaisarvo mikäli

$$Tv = \lambda v$$

jollekin nollasta poikkeavalle $v \in F$. Tällöin v on (ominaisarvolle λ kuuluva) T:n ominaisvektori. Kuten aiemmin reaalisessa tapauksessa, määrittelemme T:n karakteristisen polynomin kaavalla

$$p(\lambda) = \det(T - \lambda I).$$

Huomaa, että polynomin p kertoimet ovat kompleksisia. Lisäksi p:n aste on sama kuin F:n dimensio, ja p:n juuret ovat T:n ominaisarvot.

Sama todistus kuin reaalisessa tapauksessa antaa nyt seuraavan tuloksen:

Lause. *Olkoon $T : F \to F$ lineaarikuvaus n-ulotteisessa kompleksisessa vektoriavaruudessa F. Oletetaan, että T:n ominaisarvot ovat erisuuret.*

Tällöin T on diagonalisoituva. Edelleen, avaruudella F on kanta $\{e_1, \ldots, e_n\}$, missä vektorit e_i ovat T:n ominaisvektoreita. Siten voimme kirjoittaa alkiolle $z \in F$:

$$Tz = T(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i e_i,$$

missä ominaisvektori e_i kuuluu ominaisarvolle λ_i.

Kuten näimme edellä, $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Tarkastellaan nyt lähemmin reaalisten $\mathbb{R}^n$:n aliavaruuksien ja kompleksisten $\mathbb{C}^n$:n aliavaruuksien yhteyksiä. Olkoon $F \in \mathbb{C}^n$ kompleksinen vektoriavaruus, ja määritellään joukko $F_\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ kaavalla

$$F_\mathbb{R} = F \cap \mathbb{R}^n = \{[z_1, \ldots, z_n]^T \in F \mid z_i \in \mathbb{R} \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n\}.$$

Selvästi $F_\mathbb{R}$ on suljettu vektorien yhteenlaskun suhteen ja reaalisella skalaarilla kertomisen suhteen. Siten $F_\mathbb{R}$ on reaalinen vektoriavaruus. Kääntäen, olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ reaalinen vektoriavaruus, ja määritellään $\mathbb{C}^n$:n aliavaruus $E_\mathbb{C}$ kaavalla

$$E_\mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^{(i)}, \quad z^{(i)} \in E, \lambda_i \in \mathbb{C}\}.$$

Joukko $E_\mathbb{C}$ siis koostuu E:n (reaalisten) vektorien kompleksisista lineaarikombinaatioista. Huomaa, että $(E_\mathbb{C})_\mathbb{R} = E$.

Sanomme, että $F_\mathbb{R}$ on kompleksisen vektoriavaruuden F *reaalinen osa* ja että $E_\mathbb{C}$ on reaalisen vektoriavaruuden E *kompleksifiointi*.

Katsotaan seuraavaksi kompleksikonjugoinnin merkitystä kompleksisille vektoriavaruuksille. Skalaarin $z = x + iy$ kompleksikonjugaattihan on $\bar{z} = x - iy$, jota merkitsemme tässä myös funktiolla $\sigma(z) = \bar{z}$. Siten $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on funktio, jolle pätee $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma =$ identiteetti. Funktion σ kiintopisteet $\mathbb{C}$:ssä (eli ne pisteet $z \in \mathbb{C}$, joille $\sigma(z) = z$) ovat täsmälleen reaaliluvut $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Laajennamme konjugoinnin funktioksi $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ yksinkertaisesti konjugoimalla alkioittain:

$$\sigma([z_1, \ldots, z_n]^T) = [\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n]^T.$$

Laajennetun kuvauksen kiintopisteiden joukko on $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Edelleen, jos $F \subset \mathbb{C}^n$ on σ:n suhteen invariantti aliavaruus , niin σ:n kiintopisteiden joukko F:ssä on $F_\mathbb{R}$.

Olkoon $F \subset \mathbb{C}^n$ aliavaruus, joka on σ:n suhteen invariantti (eli $\sigma(F) \subset F$). Silloin pätee kaikille $v, w \in F$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$, että

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w), \tag{1}$$
$$\sigma(\lambda v) = \bar{\lambda}\sigma(v). \tag{2}$$

Huomataan siis, että σ ei ole (kompleksi)lineaarinen kuvaus, koska kaavassa (2) esiintyy $\bar{\lambda}$ eikä λ, kuten lineaarisuuden määritelmä vaatisi.

Olkoon nyt $F \subset \mathbb{C}^n$ aliavaruus. Näytetään, että $F_{\mathbb{R}}$ on kuvauksen $\sigma : F \to \mathbb{C}^n$ kiintopisteiden joukko:

$$F_{\mathbb{R}} = \{z \in F \mid \sigma(z) = z\}. \tag{3}$$

Ensinnäkin, jos $z \in F_{\mathbb{R}}$, niin kaikki z:n komponentit ovat reaalisia ja siten $\sigma(z) = z$. Näin ollen

$$F_{\mathbb{R}} \subset \{z \in F \mid \sigma(z) = z\}. \tag{4}$$

Toisaalta, jos $z \in F$ toteuttaa $\sigma(z) = z$, niin jokaiselle z:n komponentille pätee $z_i = \bar{z}_i$ eli $z_i \in \mathbb{R}$. Määritelmän mukaan tällöin $z \in F_{\mathbb{R}}$, eli saamme

$$F_{\mathbb{R}} \supset \{z \in F \mid \sigma(z) = z\}. \tag{5}$$

Kaava (3) seuraa nyt kaavoista (4) ja (5).

Määrittelimme yllä reaalisen aliavaruuden $E \subset \mathbb{R}^n$ kompleksifioinnin. Voimme myös puhua käänteisestä operaatiosta eli aliavaruuden $F \subset \mathbb{C}^n$ *dekompleksifioinnista*, jossa käytetään apuna kuvausta σ. Dekompleksifioinnissa on annettu $F \subset \mathbb{C}^n$, ja kysytään, voidaanko F kirjoittaa muodossa $F = E_{\mathbb{C}}$ jollakin reaalisella aliavaruudella $E \subset \mathbb{R}^n$?

Väite. *Dekompleksifiointi on mahdollista jos ja vain jos $\sigma(F) \subset F$.*

Todistus. Ehdon riittävyys. Jos $\sigma(F) \subset F$, niin $x - iy \in F$ aina kun $x + iy \in F$, missä $x, y \in \mathbb{R}^n$. Siten $x \in F$:

$$x = \frac{1}{2}[(x + iy) + (x - iy)] \in F.$$

Vastaavalla päättelyllä nähdään, että $y \in F$. Tästä näemme, että $F = E_{\mathbb{C}}$ valinnalla $E = F_{\mathbb{R}}$. Ehdon välttämättömyys on selvää, ja todistus on valmis.

Olemme nähneet, kuinka reaalinen vektoriavaruus $E \subset \mathbb{R}^n$ kompleksifioidaan ja saadaan $E_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$. Myös lineaarikuvauksella $T : E \to E$ on kompleksifiointi

$$T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}},$$

joka määritellään seuraavasti. Kirjoitetaan piste $z \in E_{\mathbb{C}}$ muodossa $z = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)}$, missä $x^{(i)} \in E$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, r$. Asetetaan

$$T_{\mathbb{C}}\, z = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, T x^{(i)}.$$

Jos $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ on avaruuden E kanta, niin $\mathcal{B}$ on myös kompleksisen vektoriavaruuden $E_{\mathbb{C}}$ kanta. Edelleen, jos A on lineaarikuvauksen $T : E \to E$ matriisi kannassa $\mathcal{B}$, niin A on myös lineaarikuvauksen $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ matriisi kannassa $\mathcal{B}$. Erityisesti, jos $n \times n$-matriisi A esittää lineaarikuvausta $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ standardikoordinaateissa, niin A esittää myös lineaarikuvausta $T_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ standardikoordinaateissa.

Nyt kysymme: Millä ehdoilla lineaarikuvaus $Q : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ on jonkin reaalisen lineaarikuvauksen $T : E \to E$ kompleksifiointi?

Väite. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ reaalinen vektoriavaruus ja $E_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ sen kompleksifiointi. Olkoon $Q : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ kompleksinen lineaarikuvaus. Tällöin $Q = T_{\mathbb{C}}$ jollakin reaalisella lineaarikuvauksella $T : E \to E$ jos ja vain jos

$$Q\sigma = \sigma Q.$$

Todistus. Ehdon riittävyys. Oletetaan, että Q ja σ kommutoivat: $Q\sigma = \sigma Q$. Silloin $Q(E) \subset E$, koska jos $x \in E$, niin $\sigma(x) = x$ ja

$$\sigma Q x = Q\sigma x = Qx,$$

eli

$$Qx \in \{y \in E_{\mathbb{C}} \,|\, \sigma y = y\} = (E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = E.$$

Määritellään nyt reaalinen lineaarikuvaus $T : E \to E$ kaavalla $Tx = Qx$ kaikille $x \in E$. On selvää, että $T_{\mathbb{C}} = Q$.

Ehdon välttämättömyys. Oletetaan, että $Q = T_{\mathbb{C}}$ jollakin reaalisella lineaarikuvauksella $T : E \to E$. On todistettava, että $Q\sigma = \sigma Q$. Otetaan mielivaltainen piste $z \in E_{\mathbb{C}}$ ja kirjoitetaan se muodossa $z = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^{(i)}$, missä $x^{(i)} \in E$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, r$. Koska vektorit $x^{(i)} \in E$ ovat reaalisia, pätee

$$\sigma(x^{(i)}) = x^{(i)} \qquad \text{kaikilla } i = 1, \ldots, r. \tag{6}$$

Lisäksi ehdosta $Q = T_{\mathbb{C}}$ seuraa, että

$$\sigma(Qx^{(i)}) = \sigma(Tx^{(i)}) = Tx^{(i)} = Qx^{(i)} \qquad \text{kaikilla } i = 1, \ldots, r. \tag{7}$$

Lasketaan käyttämällä kaavoja (1), (2), (6) ja (7)

$$\begin{aligned}
Q\sigma z &= Q\sigma \sum_{i=1}^r \lambda_i x^{(i)} \\
&= Q \sum_{i=1}^r \bar{\lambda}_i x^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^r \bar{\lambda}_i Q x^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^r \sigma(\lambda_i \sigma(Qx^{(i)})) \\
&= \sum_{i=1}^r \sigma(\lambda_i Q x^{(i)}) \\
&= \sigma Q \sum_{i=1}^r \lambda_i x^{(i)} \\
&= \sigma Q z.
\end{aligned}$$