LUENTO 9 H-S 4 §2

Reaaliset matriisit ja kompleksiset ominaisarvot

Jatkamme yhtälön

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = Tx$$

tutkimista, missä T on lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n$:ssä.
Aiemmin katsoimme tilannetta, jossa T:n ominaisarvot ovat reaalisia ja erisuuria.
Nyt jätämme reaalisuusoletuksen pois.

PROPOSITIO
Olkoon T lineaarikuvaus reaaliselta vektoriavaruudelta $E \subset \mathbb{R}^n$ itselleen. Tällöin jos $\lambda \in \mathbb{C}$ on T:n ominaisarvo, myös $\bar{\lambda}$ on T:n ominaisarvo. Voimme siis luetella T:n ominaisarvot muodossa

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \quad \text{reaalisia,}$$

$$\mu_1, \bar{\mu}_1, \ldots, \mu_s, \bar{\mu}_s \quad \text{ei-reaalisia.}$$

TODISTUS Huomataan ensin, että T:n ja sen kompleksifioinnin $T_{\mathbb{C}}$ ominaisarvot ovat samat, koska karakteristiset polynomit ovat samat. Olkoon λ $T_{\mathbb{C}}$:n ominaisarvo ja φ sitä vastaava ominaisvektori $E_{\mathbb{C}}$:ssä:

$$T_{\mathbb{C}} \varphi = \lambda \varphi$$

Edellisen luvun proposition nojalla $\sigma T_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}}\sigma$, missä σ on konjugointi. Niinpä

$$\sigma(T_{\mathbb{C}}\varphi) = T_{\mathbb{C}}\sigma(\varphi) = T_{\mathbb{C}}\overline{\varphi}$$

Toisaalta $\sigma(T_{\mathbb{C}}\varphi) = \overline{\lambda}\,\overline{\varphi}$.

Saadaan

$$T_{\mathbb{C}}\overline{\varphi} = \overline{\lambda}\,\overline{\varphi},$$

eli $\overline{\lambda}$ on $T_{\mathbb{C}}$:in ominaisarvo ja vastaava ominaisvektori on $\overline{\varphi}$.

$\square$

<u>Lause 1.</u> Olkoon $T: E \to E$ reaalinen lineaarioperaattori, jolla on erisuuret ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \overline{\mu}_1, \dots, \mu_s, \overline{\mu}_s$. Silloin

$$E = E_a \oplus E_b, \quad T = T_a \oplus T_b,$$

$$T_a : E_a \to E_a, \quad T_b : E_b \to E_b,$$

missä T_a:n ominaisarvot ovat reaalisia ja T_b:n ei-reaalisia.

<u>TODISTUS.</u> Tarkastellaan kompleksifiointia $T_{\mathbb{C}}$ ja yhdistetään luvun 4 §1 lause edelliseen propositioon. Saamme kannan $E_{\mathbb{C}}$:lle:

$$\{e_1, e_2, \dots, e_r, f_1, \overline{f}_1, \dots, f_s, \overline{f}_s\},$$

missä e_i:t ja f_j:t ovat $T_{\mathbb{C}}$:n ominaisvektoreita, joita vastaavat ominaisarvot ovat

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \mu_1, \overline{\mu}_1, \dots, \mu_s, \overline{\mu}_s$$

Olkoon nyt $F_a \subset E_{\mathbb{C}}$ se aliavaruus, jonka virittävät $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ ja $F_b \subset E_{\mathbb{C}}$ se, jonka virittävät $\{f_1, \overline{f}_1, \dots, f_s, \overline{f}_s\}$. Siten F_a ja F_b ovat invariantteja $T_{\mathbb{C}}$:lle ja muodostavat jaon

$$E_{\mathbb{C}} = F_a \oplus F_b .$$

Lisäksi F_a ja F_b ovat invariantteja kompleksikonjugoinnin suhteen: $\sigma(F_a) \subset F_a$ ja $\sigma(F_b) \subset F_b$. Asetetaan $E_a = E \cap F_a$ ja $E_b = E \cap F_b$. Silloin F_a ja F_b ovat E_a:in ja E_b:in kompleksifioinnit ja $E = E_a \oplus E_b$. $\square$

Lause 1 palauttaa T:n tutkimisen T_a:n ja T_b:n erilliseen tutkimiseen. T_a:n jo osaammekin.

Yhtälö (*) voidaan nyt kirjoittaa kahdessa osassa:

$$\frac{dx_a}{dt} = T_a x_a , \quad \frac{dx_b}{dt} = T_b x_b ,$$

missä $x_a \in E_a$ ja $x_b \in E_b$.

Ryhdymme nyt tutkimaan kuvausta T_b.

<u>Lause 2</u> Olkoon $T : E \to E$ lineaarikuvaus reaalisessa vektoriavaruudessa $E \subset \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että T:llä on erisuuret, ei-reaaliset ominaisarvot

$$\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_s, \overline{\mu_s} .$$

Tällöin voimme ~~[illegible]~~ kirjoittaa

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s ,$$
$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s ,$$

missä jokainen E_i on 2-ulotteinen ja ~~[illegible]~~ kuvauksen $T_i : E_i \to E_i$ ominaisarvot ovat μ_i ja $\overline{\mu_i}$.

TODISTUS. Olkoon $F_i \subset E_{\mathbb{C}}$ ominaisvektorien f_i ja $\bar{f}_i$ virittämä aliavaruus, μ_i ja $\bar{\mu}_i$. Olkoon $E_i = F_i \cap E$, ja väite seuraa. $\square$

Lause 3. Olkoon $T : E \to E$ lineaarikuvaus ja $E \subset \mathbb{R}^n$ 2-ulotteinen aliavaruus. Oletetaan, että T:n ominaisarvot ovat ei-reaaliset μ ja $\bar{\mu}$, $\mu = a + ib$. Silloin T:llä on matriisiesitys

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

TODISTUS. Olkoon $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ T:n kompleksifiointi. $T_{\mathbb{C}}$:llä on ominaisarvot μ ja $\bar{\mu}$ ~~niin on olemassa~~ ja vastaavat ominaisvektorit $\varphi, \bar{\varphi} \in E_{\mathbb{C}}$. Merkitään $\varphi = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Silloin $\bar{\varphi} = u - iv$. Huomataan, että $u \in E_{\mathbb{C}}$ ja $v \in E_{\mathbb{C}}$, koska

$$u = \tfrac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi}), \quad v = \tfrac{1}{2}(\bar{\varphi} - \varphi).$$

Siksi $u, v \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n = E$.
Lisäksi nähdään, että u ja v ovat lineaarisesti riippumattomat: jos

$$t_1 u + t_2 v = 0, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

niin $t_1 = 0$ ja $t_2 = 0$. Todistus vastaoletuksella: $t_1 \neq 0$. Lasketaan

$$t_1 \varphi = t_1 u + i t_1 v = -t_2 v + i t_1 v = (-t_2 + i t_1) v$$

$$t_1 \bar{\varphi} = t_1 u - i t_1 v = -t_2 v - i t_1 v = (-t_2 - i t_1) v$$

Koska $t_1 \neq 0$, voimme kirjoittaa

$$\varphi = \frac{-t_2 + it_1}{t_1} v \quad \text{ja} \quad \overline{\varphi} = \frac{-t_2 - it_1}{t_1} v,$$

eli φ ja $\overline{\varphi}$ ovat lineaarisesti riippuvat → Ristiriita!

Vastaavasti, jos $t_2 \neq 0$.

Siten $\{v, u\}$ on E:n kanta.

Lasketaan T:n matriisiesitys.

$$T_{\mathbb{C}}(u+iv) = (a+ib)(u+iv)$$
$$= (-bv+au) + i(av+bu)$$

Myös $T_{\mathbb{C}}(u+iv) = Tu + iTv$.

Siksi

$$Tv = av + bu$$
$$Tu = -bv + au,$$

ja T:n matriisi kannassa $\{v, u\}$ on $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

$\square$

<u>Seuraus</u>: Olkoon $\varphi \in E_{\mathbb{C}}$ se T:n ominaisvektori, joka kuuluu ominaisarvolle $a+ib$, $b \neq 0$. Jos $\varphi = u + iv \in \mathbb{C}^n$, niin $\{v, u\}$ on E:n kanta, jossa T:n matriisi on $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Esimerkki: Annettu matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

joka esittää lineaarioperaattoria ~~T~~ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ standardikannassa. Etsitään aliavaruus $E \subset \mathbb{R}^3$ s.e. $\dim E = 2$ ja $T(E) \subset E$.

Määrätään E:hen sellainen kanta, että $T|E$:n matriisi on muotoa

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Lasketaan A:n ominaisarvot. Karakteristinen polynomi on

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2+2)$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda - i\sqrt{2})(\lambda + i\sqrt{2})$$

Saadaan $\lambda = 1$, $\mu = i\sqrt{2}$, $\bar{\mu} = -i\sqrt{2}$

Ominaisarvoa μ vastaava ominaisvektori $\varphi \neq 0$ toteuttaa

$$\begin{bmatrix} 1-i\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & -i\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1 & -i\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-i\sqrt{2}\,\varphi_2 - 2\varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = -\frac{i\sqrt{2}}{2}\varphi_2$$

$$\varphi_2 = +i\sqrt{2}\,\varphi_3$$

$$(1-i\sqrt{2})\varphi_1 + \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{1-i\sqrt{2}}\varphi_3$$

Siten

$$\varphi \in \begin{bmatrix} (1-i\sqrt{2})^{-1} t \\ i\sqrt{2}\, t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1/3 + i\sqrt{2}/3 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1/3 + \frac{i\sqrt{2}}{3} \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\varphi} = \begin{bmatrix} 1/3 - \frac{i\sqrt{2}}{3} \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kirjoitetaan

$$\varphi = u + iv, \quad u = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nyt $E \subset \mathbb{R}^3$ on vektorien u ja v virittämä aliavaruus. Merkitään

$$\mu = a + ib, \quad a = 0, \quad b = \sqrt{2}.$$

T:n matriisi kannassa $\{v, u\}$ on

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

HS 4§3

Kompleksisen lineaarialgebran soveltaminen differentiaaliyhtälöihin

Katsotaan yhtälöä

(1) $$\frac{dx}{dt} = Tx,$$

missä $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus. Oletetaan, että T:llä on n erisuurta ominaisarvoa. Silloin voimme käyttää lauseita 1, 2 ja 3 yhtälön (1) osittelemiseen ja sellaisen kannan löytämiseen, jossa yhtälö (1) on helppo ratkaista.

Asetetaan $E = \mathbb{R}^n$ ja käytetään lausetta 1 yhtälölle (1) ekvivalentin systeemin (2) määräämiseen:

(2a) $$\frac{dx_a}{dt} = T_a x_a,$$

(2b) $$\frac{dx_b}{dt} = T_b x_b.$$

Tässä $T = T_a \oplus T_b$ ja
$$x = [x_a^T \; x_b^T]^T \in E_a \oplus E_b = E,$$
T_a:lla on reaaliset ominaisarvot ja T_b:llä ei-reaaliset.

Huomaa, että (2a) ja (2b) on määritelty aliavaruuksissa E_a ja E_b eikä $\mathbb{R}^n$:ssä. Edellä kehitetty teoria toimii kuitenkin aliavaruuksissa; meidän on vain löydettävä sopivat kannat.

Yhtälön (2a) osaammekin jo ratkaista. Ratkaistaan (2b) kirjoittamalla se muotoon

$$(3) \qquad \frac{dy_i}{dt} = T_i y_i, \quad i=1,\dots,s,$$

missä $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_s$,

$y = [y_1, \dots, y_s]^T \in E_b = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$,

ja jokaisen aliavaruuden E_i dimensio on 2. Tämä on mahdollista Lauseen 2 nojalla.

Siten olemme palauttaneet yhtälön (2b) ratkaisun kaksiulotteisen systeemin

$$(4) \qquad \frac{dy_i}{dt} = T_i y_i$$

ratkaisuun, missä T_i:llä on ei-reaaliset ominaisarvot $\mu_i, \bar{\mu}_i$. Lopulta Lause 3 näyttää, miten systeemi (4) ratkaistaan.