TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

EMILIA RAUTIAINEN
OPPIMISTA TUKEVA PIENRYHMÄTOIMINTA MATEMATIIKASSA
Diplomityö

Tarkastajat: Professori Seppo Pohjolainen ja erikoistutkija Kirsi Silius
Tarkastajat ja aihe hyväksytty Luonnontieteiden ja ympäristötekniikan tiedekuntaneuvoston kokouksessa 7. huhtikuuta 2010

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
RAUTIAINEN, EMILIA: Oppimista tukeva pienryhmätoiminta matematiikassa
Diplomityö, 90 sivua, 43 liitesivua
Toukokuu 2010
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Prof. Seppo Pohjolainen (TTY) ja erikoistutkija Kirsi Silius (TTY)
Avainsanat: Matematiikkaklinikka, matematiikan tukitoimet, pienryhmäopetus

Tampereen teknillisellä yliopistolla on havaittu, että osa opiskelijoista kokee suuria vaikeuksia matematiikan opinnoissa siirryttäessä koulumatematiikasta yliopistoissa käsiteltävään matematiikkaan. Tämän seurauksena matematiikan opintojen tukemista parantavat toimenpiteet ovat keskeisessä asemassa pohdittaessa opintojen sujuvuutta ja opetuksellisten rakenteiden kehittämistä. Tukitoimien ja oppimisympäristön kehittäminen voivat tuottaa merkittävää edistystä sekä opiskelijoiden suhtautumisessa matematiikkaa kohtaan että suoriutumisessa matematiikan opinnoissa.

Tämän tutkimuksen keskiössä on Tampereen teknillisellä yliopistolla aloitettu pienryhmäkokeilu, matematiikkaklinikka, jonka tarkoituksena on tarjota vertaisoppijoille sekä matematiikan opinnoissa tukea tarvitseville opiskelijoille oppimista edistäviä opetuksellisia rakenteita. Tämän tutkimuksen kohdejoukko koostui matematiikkaklinikan toimintaan syksyllä 2009 osallistuneista opiskelijoista. Keskeisenä näkökulmana oli selvittää, oliko osallistumisella matematiikkaklinikan toimintaan vaikutusta opiskelijoiden opintomenestykseen, sekä tapahtuiko matematiikkaklinikan myötä muutosta opiskelijoiden asenteissa matematiikkaa kohtaan. Käsiteltävien tenttitulosten perusteella matematiikkaklinikan opiskelijat menestyivät kyseisissä tenteissä niin keskiarvolla kuin läpipääsyprosentilla mitattuna paremmin kuin muut opiskelijat, vaikka lähtötasoltaan he olivat muita opiskelijoita heikompia. Kyselyn sekä havainnoinnin avulla saadut vastaukset osoittavat, että pienryhmätoimintaan osallistuneiden opiskelijoiden suhtautuminen matematiikkaan oli myönteisempää matematiikkaklinikan toiminnan myötä. Opiskelijat kokivat myös, että heidän matemaattinen osaamisensa oli lisääntynyt ja matematiikan opintojen suorittaminen helpottunut pienryhmäopiskelun ansiosta.

Matematiikan opintojen tukemiseksi tutkimuksessa on esitetty opetuksellisten rakenteiden muutoksia niin luento- kuin laskuharjoitusryhmien tasolla. Opetuksen kehittämisessä korostui tämän tutkimuksen näkökulmasta erityisesti opiskelijoiden henkilökohtainen tukeminen sekä avoimen ja kannustavan ilmapiirin luominen oppimistilanteessa.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Master's Degree Programme in Science and Engineering
RAUTIAINEN, EMILIA:
Master of Science Thesis, 90 pages, 43 Appendix pages
May 2010
Major: Mathematics
Examiner: Professor Seppo Pohjolainen (TUT), senior researcher Kirsi Silius (TUT)
Keywords: Mathematics Clinic, remedial education in mathematics, tutorial

It has been noticed at Tampere University of Technology that a part of students have not adopted the mathematical skills required for university studies. One of the crucial problems at university level studies in mathematics is that the very early steps at the beginning of studies are difficult for some students. For this reason supporting studying mathematics and developing teaching are in a central position in considering performance of students in mathematics studies and changing students' attitudes toward mathematics.

The focus of this study is a small group experiment launched at Tampere University of Technology. The experiment is called Mathematics clinic. Its purpose is to provide structures supporting the learning process for peer learners or students needing support in learning mathematics. The target group of this study consists of the students who took part in the Mathematics clinic in the autumn 2009. The main aspect of this study was to define if participation in the Mathematics clinic had an effect on the students` success in their studies and if the Mathematics clinic had an influence on their attitude about mathematics. Based on the results from the exams, the students that had participated in the clinic got better results in the examinations than other students, although in the beginning their mathematical skills were lower than those of the other students. The statistics were evaluated both by the average of the grades and the pass rate. Observations and the results obtained from the questionnaire indicate that the students had more positive attitude about mathematics due to their participation in the clinic. Students also felt that their skills and knowledge in mathematics had improved and that their studies in mathematics had become easier due to the studying in the small group.

To support studies in mathematics, this study suggests changing the structures of both lectures and exercises. This study shows that personal supporting of the students and creating an open and supporting atmosphere are important when developing the teaching processes.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö liittyy Tampereen teknillisen yliopiston Matematiikan laitoksen ja Hypermedialaboratorion matematiikan opetuksen kehittämistutkimukseen. Työni ansiosta minulla on ollut mahdollisuus ohjata ja auttaa opiskelijoita matematiikan opinnoissa, mikä on ollut kokemuksena hyvin mielekäs sekä opettavainen.

Työni tarkastajina ja ohjaajina ovat toimineet professori Seppo Pohjolainen ja erikoistutkija Kirsi Silius. Heille haluan lausua suuret kiitokset diplomityöni aiheesta sekä ohjauksesta ja tuesta. Lisäksi haluan kiittää työkavereitani siitä kaikesta avusta ja kannustuksesta, jota olette antaneet diplomityöprosessini aikana.

Suurimmat kiitokset kuuluvat kuitenkin äidilleni, lapsilleni Emilille, Viiville ja Benjaminille sekä erityisesti aviomiehelleni Kallelle, joka on jaksanut tukea minua koko opiskeluni ajan. Tämä työ on omistettu rakkaalle isälleni, joka aina uskoi kykyihini ja kannusti minua vaikeinakin hetkinä jatkamaan opintojani.

SISÄLLYS

TERMIT JA NIIDEN MÄÄRITELMÄT

$A \cup B$	Joukkojen A ja B yhdiste
$A \cap B$	Joukkojen A ja B leikkaus
$\overline{A}$	A:n komplementti
$card\,(A)$	Joukon A alkioiden lukumäärä
$E[X]$	Satunnaismuuttujan X odotusarvo
f	Frekvenssi
$f\%$	Suhteellinen frekvenssi
$f:\ A \to B$	Kuvaus eli funktio joukosta A joukkoon B
$f\,(x)$	Tiheysfunktio
$F\,(x)$	Kertymäfunktio
$\Gamma\,(x)$	Gammafunktio
H_0	Nollahypoteesi
H_1	Vastahypoteesi
μ	Odotusarvo
σ	Keskihajonta
σ^2	Varianssi
$\sum$	Summamerkintä
Ω	Otosavaruus
$P(A)$	Tapahtuman A todennäköisyys
$P\,(A\,\|\,B)$	Ehdollinen todennäköisyys
q_α	α - kvantiili
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
s	Otoskeskihajonta
s^2	Otosvarianssi
$Var[X]$	Satunnaismuuttujan X varianssi
$\overline{x}$	Otoskeskiarvo
X	Satunnaismuuttuja
χ^2	Pearsonin χ^2 -testisuure
ϕ	Tyhjä joukko
BEng	Bachelor of Engineering
BSc	Bachelor of Science
HND	Higher National Diploma

NAEP	National Assessment of Educational Progress
PISA	Programme for International Students Assessment
TTY	Tampereen teknillinen yliopisto

1 JOHDANTO

Viime vuosien aikana on havaittu niin Suomessa kuin Euroopan laajuisestikin, että opiskelijoiden matematiikan osaamisen taso on heikentynyt. Osa opiskelijoista kokee suuria vaikeuksia matematiikan opinnoissa siirryttäessä koulumatematiikasta yliopistoissa käsiteltävään matematiikkaan. Tämän seurauksena eri yliopistot ja korkeakoulut ympäri Eurooppaa ovat kehittäneet matematiikan tukijärjestelyitä sekä toimintamalleja kyseisten opiskelijoiden auttamiseksi (Parson, 2005; Harrison, 2008; LTSN MathsTEAM Project, 2003). Matematiikan opintojen tukemista parantavat toimenpiteet ovat keskeisessä asemassa pohdittaessa opintojen sujuvuutta ja opetuksellisten rakenteiden kehittämistä. Tukitoimien ja oppimisympäristön kehittäminen voivat tuottaa merkittävää edistystä sekä opiskelijoiden suhtautumisessa matematiikkaa kohtaan että suoriutumisessa matematiikan opinnoissa.

Opiskelijan vaikeuksiin matematiikan opinnoissa vaikuttavat usein puutteelliset pohjatiedot (NCISLA, 2000; Näveri, 2009). Tämän rinnalla oppimiseen vaikuttavia tekijöitä ovat esimerkiksi yksilölliset erot (Riding & Sadler-Smith, 1997; Gardner, 2009), motivaation ja opiskelutaitojen puute sekä opetukselliset rakenteet (Merrill, 2001; Joutsenlahti, 2004). Vaikeuksien seurauksena matematiikan kursseista suoriutuminen on hyvin haasteellista osalle opiskelijoista, minkä takia joidenkin opiskelijoiden opinnot viivästyvät osittain suorittamattomien matematiikan kurssien johdosta. Osaamisen puute ja epäonnistuminen matematiikassa ovat omiaan muodostamaan opiskelijalle kielteistä suhtautumista koko matematiikkaa kohtaan. Tämä taas johtaa matematiikan välttelyyn, joka edelleen edesauttaa seuraavien epäonnistumisten tuntemista. (Parson, 2005)

Tämän tutkimuksen keskiössä on Tampereen teknillisellä yliopistolla aloitettu pienryhmäkokeilu, matematiikkaklinikka, jonka tarkoituksena on tarjota matematiikan opinnoissa tukea tarvitseville opiskelijoille sekä vertaisoppijoille oppimista edistäviä opetuksellisia rakenteita. Ensimmäiset pienryhmät muodostettiin syyskuun 2009 aikana, ja kokonaisuudessaan tutkimuksessa käsiteltävän toimintajakson aikana matematiikkaklinikan pienryhmiin osallistui 48 opiskelijaa. Tutkimuksen kohdejoukko koostuu matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneista opiskelijoista. Tarkoituksena on kartoittaa ketkä opiskelijat hakeutuivat matematiikkaklinikalle, ja miten kyseiset opiskelijat erosivat muista samaa kurssia suorittavista opiskelijoista. Tutkimuksen keskeisenä näkökulmana on selvittää, oliko osallistumisella matematiikkaklinikan toimintaan vaikutusta opiskelijoiden opintomenestykseen, sekä tapahtuiko matematiikkaklinikan myötä muutosta opiskelijoiden asenteissa matematiikkaa kohtaan, ja miten opetusta tulisi kehittää pienryhmätoiminnasta saatujen tulosten perusteella.

Tutkimuksen taustalla esiintyviä kasvatustieteen käsitteitä ja teorioita tarkastellaan luvuissa 2 ja 3, joiden keskeiset näkökulmat ovat matemaattinen tieto ja osaaminen sekä matematiikan oppiminen ja opetus. Tutkimusaineiston analysoimisessa on käytetty eri tilastollisia menetelmiä, joiden matemaattinen taustateoria on esitelty yksityiskohtaisesti luvussa 4. Luvussa 5 keskitytään tutkimuksen toteuttamiseen ja siihen liittyviin kysymyksiin, jonka jälkeen tutkimuksen tulokset on esitelty luvussa 6 ja lopuksi yhteenveto ja päätelmät luvussa 7.

2 MATEMAATTINEN TIETO JA MATEMAATTISET PROSESSIT

Matemaattinen tieto ja osaaminen ovat tämän luvun keskeisiä käsitteitä. Matemaattisen tiedon voidaan ajatella jakautuvan proseduraaliseen sekä konseptuaaliseen tietoon, joiden muodostaman kokonaisuuden avulla opiskelijoiden on mahdollista syventää matemaattista ymmärrystään. Matemaattista osaamista ja kompetensseja määritellään ja käsitellään eri tutkijoiden esittämistä näkökulmista. Tämän lisäksi tarkastellaan PISA:n esittämää matematisoinnin mallia, joka kuvaa opiskelijoiden perusprosessia ongelmaperustaisia tehtäviä ratkaistaessa.

2.1 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto

Tutkittaessa matemaattista ajattelua ja oppimisprosesseja voidaan matemaattinen tieto jaotella *proseduraaliseen* ja *konseptuaaliseen tietoon*. Opiskelijan oppimisprosesseissa yhdistyvät nämä kaksi tiedon käsitettä kokonaisuudeksi, jonka avulla hänen on mahdollista laajentaa ja syventää matemaattista ajatteluaan ja ymmärrystään. (Haapasalo, 2003; Schneider & Stern, 2005)

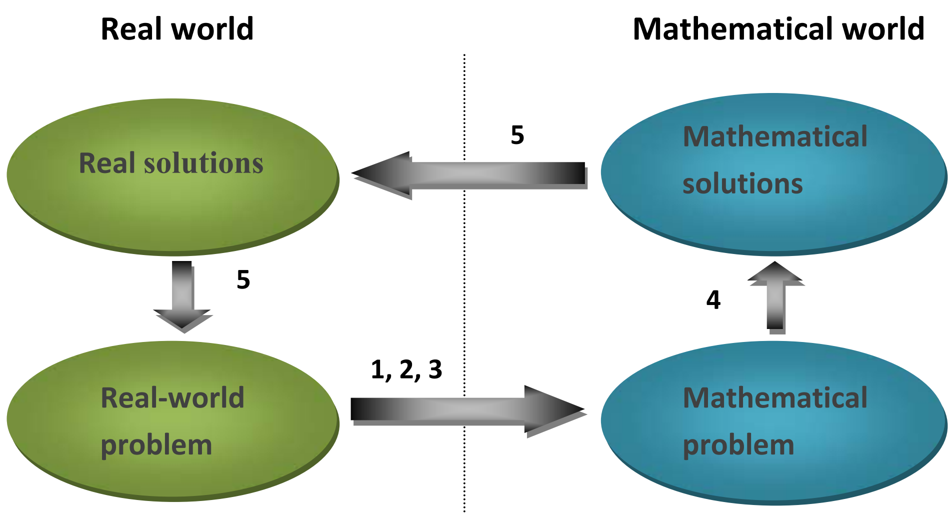
Proseduraalinen tieto nähdään operaatioiden ja algoritmien käyttötaitona, jonka avulla voidaan saavuttaa tiettyjä, haluttuja päämääriä. Se käsittää kaksi osa-aluetta, jotka ovat matematiikan formaali kieli sekä algoritmit ja säännöt. Proseduraalisen tiedon avulla opiskelijan on mahdollista ratkaista nopeasti ja tehokkaasti matemaattisia ongelmia, koska tieto on tietynasteisesti automatisoitunutta. Tämä automatisointi tapahtuu harjoittelun kautta, ja tarvittaessa se aktivoituu nopeasti opiskelijan käyttöön. Opiskelija siis kykenee proseduraalisen tiedon avulla suorittamaan tehtävässä tarvittavat laskutoimitukset, mutta pelkkä operaatioiden ja algoritmien käyttötaito ei useinkaan riitä tehtävän täydelliseen ratkaisemiseen. Proseduraalisen tiedon lisäksi opiskelijan tulee kyetä myös harkittuun ajatteluun ja päättelyyn. (Haapasalo, 2003; Schneider & Stern, 2005)

Konseptuaalinen tieto merkitsee keskeisten käsitteiden ja periaatteiden sekä niiden keskinäisten suhteiden ymmärrystä tietyssä määrittelyjoukossa. Tämän vuoksi konseptuaalisen tiedon ajatellaan koostuvan toisiinsa kytkeytyneestä tiedosta. Konseptuaalisesta tiedosta puhuttaessa korostuu usein sana ymmärrys. Kyseistä tietoa voidaan enimmäkseen verbalisoida ja joustavasti muuntaa päättely- ja ajatusprosessien aikana. Se ei ole tämän takia sidottu tiettyyn matemaattiseen ongelmaan, vaan sen avulla opiskelijan on mahdollista ratkaista moninaisia ongelmatyyppejä tietyltä aihealueelta. (Schneider & Stern, 2005)

Konseptuaalista tietoa ei voida saavuttaa pelkästään ulkoa opettelemalla, vaan sen täytyy olla opittu niin sanotun mielekkään oppimisen tavalla. Mielekkään oppimisen kautta opitut proseduurit ovat linkittyneet konseptuaaliseen tietoon ja näin ollen ovat opiskelijalle monikäyttöisempiä kuin pelkästään ulkoaopettelun varaan jääneet proseduurit. Koska proseduurit ovat keino kääntää ja muuntaa konseptuaalista tietoa muodosta toiseen, ovat proseduurit ja konseptuaalinen tieto vahvasti linkittyneinä toisiinsa. Opiskelijoiden on monesti vaikeaa omaksua konseptuaalista tietoa, mikä saattaa johtua siitä, että opiskelija näkee opiskellut käsitteet usein irrallisina ja abstrakteina eikä pysty sisäistämään määritelmien todellista merkitystä. Hän ei kykene muodostamaan kokonaisuuksia ja yhteyksiä käsitteiden välille, koska näitä näkökulmia ei monestikaan pohdita yhdessä matematiikan oppitunneilla. (Joutsenlahti, 2005)

2.2 Matematisointi

Opiskelijoiden kykyä analysoida, perustella ja yhdistellä matemaattisia ideoita tehokkaasti erilaisissa tilanteissa voidaan arvioida eri keinoin. Matemaattisten ongelmien ratkaiseminen vaatii taitojen ja kompetenssien käyttämistä, joita he ovat omaksuneet kouluvuosiensa ja elämänkokemuksiensa kautta. PISA käyttää nimitystä matematisointi puhuttaessa perusprosessista, jota opiskelijat käyttävät ratkaistessaan tosielämän ongelmia. Matematisointi kuvataan viidestä askeleesta koostuvana kehänä. Nämä askeleet on esitetty *Kuvassa 1* ja selitetty yksityiskohtaisemmin alla(OECD, 2006):



Kuva 1: *Matematisoinnin kehä (OECD, 2006)*

Ensimmäinen vaihe matematisoinnissa on tosielämän ongelman muuntaminen matemaattiseen muotoon. Tämä prosessi pitää sisällään seuraavat toiminnot (OECD, 2006):

- Relevantin matematiikan tunnistaminen kyseisen tosielämään sijoittuvan ongelman näkökulmasta
- Ongelman esittäminen tavalla, joka sisältää matemaattisia käsitteitä ja periaatteita sekä tarvittavien oletusten tekeminen
- Ongelmassa esiintyvän kielen ja symbolisen sekä formaalisen kielen välisen yhteyden ymmärtäminen
- Säännönmukaisuuksien, suhteiden ja mallien löytäminen
- Niiden näkökulmien tunnistaminen, jotka ovat samanmuotoisia tunnettujen ongelmien kanssa
- Ongelman muuttaminen matemaattiseksi malliksi

Kun opiskelija on muuntanut ongelman matemaattiseen muotoon, jatkuu kokonaisprosessi matematiikan sisällä. Opiskelijat käyttävät matemaattisia taitojaan ja ajatuksiaan sekä yrittävät parantaa ja tarkistaa malliaan kyseisestä ongelmatilanteesta. Tätä osaa matematisointiprosessista kutsutaan yleisesti mallintamisen kehän deduktiiviseksi osaksi, ja se käsittää seuraavat toiminnot (OECD, 2006):

- Erilaisten esittämistapojen käyttäminen ja vaihtaminen
- Symbolisen, formaalin ja teknisen kielen ja operaatioiden käyttäminen
- Matemaattisten mallien paranteleminen, sovittaminen ja yhdistäminen
- Perusteleminen
- Yleistäminen

Viimeiset askeleet ongelman ratkaisemisessa sisältävät koko matematisointiprosessin ja tulosten pohtimisen. Opiskelijoiden tulee tulkita tuloksia kriittisellä asenteella sekä perustella koko prosessi. Tämä vaihe ilmaistaan kahdessa kohdassa *Kuvassa 1* käyttämällä merkintää ”5”. Pohdiskelu- ja perusteluprosessin näkökulmat ovat (OECD, 2006):

- Matemaattisten periaatteiden ja käsitysten laajuuden ja rajojen ymmärtäminen
- Matemaattisten perusteluiden pohtiminen sekä tulosten selittäminen ja osoittaminen oikeiksi
- Mallin ja sen rajojen arviointi

2.3 Matemaattinen osaaminen ja kompetenssi

Ymmärtäminen oli keskeinen käsite 1990-luvun matematiikan didaktiikan tutkimuksissa. 2000-luvulla kuitenkin kiinnostuksen kohteena on ollut opiskelijoiden kompetenssien tarkasteleminen. Eri tutkimuksissa kompetensseja kuvaava termi hiukan vaihtelee. NAEP (NAGB, 1999) käyttää mittauksissaan nimitystä matemaattinen suorituskyky (*mathematical power*), kun taas PISA-tutkimuksissa (OECD, 2006) käsitellään matemaattista kompetenssia (*mathematical competence*) ja matemaattista taitoa (*mathematical literacy*). Kilpatrick, Swafford ja Findell (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) käyttävät matemaattisista taidoista puhuttaessa käsitettä matemaattinen osaaminen (*mathematical proficiency*). Kyseiset käsitteet koostuvat joukosta tunnistettavia taitoja ja ne liittyvät erilaisten matemaattisten taitojen hallintaan. (Joutsenlahti, 2005)

2.3.1 Bloomin taksonomia

Bloomin taksonomia on kehitetty luokittelemaan opiskelijan osaamista, ja tätä kategorisointia on hyödynnetty myös matematiikan alalla määritettäessä ja arvioitaessa opiskelijoiden kompetensseja. Bloomin taksonomia koostuu kuudesta hierarkkisesta tasosta, jossa jokainen alempi taso sisältyy ylempiin tasoihin. Esimerkiksi tietäminen on Bloomin taksonomian alin taso, ja tämä tulee hallita ennen seuraavan tason, ymmärtämisen saavuttamista. Nämä kuusi tasoa on hyvä sovittaa mukaan oppimisprosesseja arvioitaessa. Bloomin taksonomian mukaan yksilön osaaminen koostuu seuraavista tekijöistä (Bloom, 1956):

- ***Tietäminen***: yleisten termien, tosiasioiden, periaatteiden ja menettelytapojen muistaminen ja tunnistaminen
- ***Ymmärtäminen***: tosiasioiden, käsitteiden ja periaatteiden ymmärtäminen, tiedon siirtäminen uuteen kontekstiin, aineiston tulkinta ja vertailu, järjestteleminen, ryhmitteleminen, johtopäätösten tekeminen ja seuraamusten ennustaminen
- ***Soveltaminen***: tiedon käyttäminen, ongelmien ratkaiseminen, käsitteiden ja periaatteiden soveltaminen uusiin tilanteisiin
- ***Analysoiminen***: mallien näkeminen, sanomattomien oletusten ja loogisten virhepäätelmien tunnistaminen, kyky erottaa tosiasiat ja päätelmät toisistaan
- ***Syntetisoiminen***: vanhojen ajatusten ja käsitysten käyttäminen uusia luotaessa, yleistysten tekeminen annetuista tosiasioista, tiedon yhdisteleminen useilta eri aloilta, johtopäätösten ennustaminen ja tekeminen
- ***Arvioiminen***: eri ajatusten ja käsitysten vertailu ja erottaminen toisistaan, esitysten ja teorioiden arvioiminen, harkittuun ja perusteltuun järkeilyyn perustuva valintojen tekeminen, todistusaineiston arvon todentaminen, subjektiivisuuden tunnistaminen

2.3.2 Matemaattinen suorituskyky

NAEP:n (NAGB, 1999) mittauksissa käytetty nimitys matemaattinen suorituskyky koostuu opiskelijan laaja-alaisista kyvyistä kerätä yhteen ja käyttää matemaattista tietoa (Joutsenlahti, 2005). Se käsittää matemaattisen tiedon käytön tutkittaessa tiettyä ongelmaa, tehdessä loogisia päätelmiä, ratkaistaessa ei-rutiini ongelmia ja yhdistää eri konteksteissa olevia matemaattisia ideoita toisiinsa. Opiskelijan suorituskyvyn mittaaminen vaatii jatkuvaa erilaisten arviointimittarien käyttämistä. Opiskelijan matemaattinen suorituskyky voidaan nähdä yleisenä konseptuaalisen ymmärtämisen taitoina, proseduraalisena tietona ja ongelmanratkaisukykynä. (NAGB, 1999)

2.3.3 Matemaattinen osaaminen

Matemaattinen osaaminen (mathematical proficiency) pitää sisällään ne elementit, joita tarvitaan matematiikan menestyksekkääseen oppimiseen. Se kietoo yhteen kaikki matemaattisen asiantuntemuksen, pätevyyden, tietämyksen ja kykyjen näkökulmat. Matemaattinen osaaminen koostuu viidestä eri ulottuvuudesta. Ensimmäinen tekijä, *konseptuaalinen ymmärtäminen* (conceptual understanding) pitää sisällään matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärryksen. *Laskutaito* (procedural fluency) on matemaattisen ajattelun toinen ulottuvuus, ja se tarkoittaa laskujen joustavaa, virheetöntä ja toimivaa suorittamista. Kolmantena tekijänä on *ongelmanratkaisutaito* (strategic competence), joka viittaa kykyyn formuloida, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Neljännen ulottuvuuden muodostaa *päättelykyky* (adaptive reasoning). Se kuvaa opiskelijan kykyä loogiseen ajatteluun, pohdiskeluun ja perusteluun. Matemaattisen ajattelun viimeinen osatekijä on *matematiikan hyödyllisyyden ymmärtäminen* (productive disposition). Nämä viisi osatekijää ovat tiukasti toisistaan riippuvaisia tutkittaessa opiskelijan matemaattista osaamista. Ne vaikuttavat siihen, miten opiskelijat kehittävät matemaattista osaamistaan, miten opettajat kehittävät tätä osaamista heidän opiskelijoissaan ja miten opettajia koulutetaan kyseisen päämäärän saavuttamiseksi. Tämän takia kaikkien viiden osatekijän yhdistetty ja tasapainoinen kehittyminen pitäisi ohjata matematiikan opettamista ja oppimista. Tästä huolimatta koulumatematiikka keskittyy liian usein vain yhteen tai muutamaan matemaattisen osaamisen tekijään rajaamalla loput ulottuvuudet opiskelun ulkopuolelle. (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)

2.3.4 Matemaattinen taito ja kompetenssi

PISA määrittelee matemaattisen taidon yksilön kyvyksi tunnistaa ja ymmärtää matematiikan merkityksen maailmassa, tehdä perusteltuja ratkaisuja sekä käyttää ja saada yhteys matematiikkaan tavalla, joka kohtaa yksilön elämän. Matemaattinen taito kuvaa opiskelijan kyvykkyyttä analysoida, päätellä ja yhdistää käsityksiä tehokkaasti esittäessään, muotoillessaan, ratkaistessaan ja tulkitessaan matemaattisia ongelmia erilaisissa tilanteissa. Yksilön matemaattisen taidon laajuus ja syvyys nähdään tavassa, jolla hän ratkaisee matemaattisia ongelmia käyttämällä tietojaan ja osaamistaan. (OECD, 2006)
Yksilön, joka kykenee onnistuneesti ratkaisemaan matematiikan avulla erilaisia tilanteita, matemaattisen kontekstin ulko- ja sisäpuolella sekä yhdistämään ideoita, täytyy hallita useita matemaattisia kompetensseja. Nämä kompetenssit yhdessä nähdään muodostavan kaikenkattavan matemaattisen kompetenssin. Kompetenssit voidaan saavuttaa eri osaamisen tasoilla, mutta erilaiset ongelmanratkaisutilanteet nostavat

esiin erilailla näitä kompetensseja. Tunnistamisen ja tarkastelemisen takia PISA on päättänyt tehdä jaon kahdeksaan tyypilliseen matemaattiseen kompetenssiin (OECD, 2006):

- **Ajatteleminen ja päättely** *(Thinking and reasoning)*: Tämä pitää sisällään matematiikalle tyypillisiä kysymyksiä, kuten ”Onko olemassa...?”, ”Jos on, niin kuinka monta?”, ”Miten löydän...?”; matematiikan tarjoamien vastausten tietäminen tällaisiin kysymyksiin; erilaisten väittämien erottaminen (määritelmät, lauseet, otaksumat, esimerkit); ja annetun matemaattisen käsitteen suuruuden ja rajoitusten ymmärtäminen ja käsitteleminen.
- **Perusteleminen** *(Argumentation)*: Yksilö tietää, mitä on matemaattinen todistus, ja miten ne eroavat muusta matemaattisesta päättelystä; eri tyyppisten matemaattisten perusteluketjujen seuraaminen ja arvioiminen; heuristisen tunteen omaaminen (”Mitä voi ja mitä ei voi tapahtua ja miksi?”); ja matemaattisten perusteluiden luominen ja esittäminen.
- **Kommunikointi** *(Communication):* Tämä pitää sisällään kyvyn ilmaista itseään matemaattisessa asiasisällössä moninaisilla tavoilla niin suullisessa kuin kirjallisessakin muodossa sekä kyvyn ymmärtää muiden kirjallisia ja suullisia väittämiä.
- **Mallintaminen** *(Modelling):* Kyky jäsentää mallinnettavaa tilannetta tai alaa; todellisen tilanteen siirtäminen matemaattisiin rakenteisiin; matemaattisten mallien tulkitseminen todellisissa tilanteissa; matemaattisen mallin työstäminen; mallin vahvistaminen; mallin ja sen tulosten pohtiminen, analysoiminen ja kritiikin esittäminen.
- **Ongelman esittäminen ja ratkaiseminen** *(Problem posing and solving):* Erilaisten matemaattisten ongelmien synnyttäminen, formulointi ja määritteleminen, sekä erilaisten matemaattisten ongelmien ratkaiseminen usealla tavalla.
- **Esittäminen** *(Representation):* Matemaattisten kohteiden ja tilanteiden eri esittämismuotojen välisten yhteyksien tulkitseminen, muuntaminen, soveltaminen ja erotteleminen.
- **Symbolien, formaalin ja teknisen kielen sekä operaatioiden käyttö** *(Using symbolic, formal and technical language an operations):* Symbolisen ja formaalin kielen tulkitseminen sekä yhteyden ymmärtäminen luonnolliseen kieleen; symboleita ja kaavoja sisältävien ilmaisujen ja väittämien käsittely; muuttujien käyttäminen, yhtälöiden ratkaiseminen ja laskujen tekeminen.
- **Apuvälineiden ja työkalujen käyttö** *(Use of aids and tools):* Erilaisten apuvälineiden ja työkalujen tiedostaminen sekä käyttäminen

2.3.5 Matemaattisen ajattelun arvioiminen, vastaustiedon laadulliset tasot

Kun halutaan selvittää opiskelijoiden osaamista ja tietyn asian hallinnan syvällisyyttä, on kiinnitettävä huomiota laadukkaaseen arviointiin ja luokitteluun. Biggs ja Collins ovat laatineet oppimisen laadun mittaamiseen luokittelun (Biggs, 1979), joka sisältää viisi hierarkkista vastauksen tasoa. Tämä malli tunnetaan nimellä SOLO- taksonomia, joka viittaa sanoihin Structure of the Observed Learning Outcome. Yrjönsuuri on kehitellyt kyseisen taksonomian pohjalta matematiikan suorituksen arvioimiseen soveltuvan laadullisen vastaustiedon luokittelun (Yrjönsuuri, 2002), jonka avulla pystytään arvioimaan opiskelijoiden keskinäisiä suorituksia sekä opiskelijan matemaattisen ymmärtämisen tasoa. Tämä vastaustiedon luokittelu on rakennettu siten, että jokainen tehtävä on mahdollista arvioida asteikolla 0-6.

Luokittelun alin tiedon ja ajattelun taso on *rakenteeton tieto* (pre-structural), jolloin tieto on puutteellista, toiminta on epäjohdonmukaista ja vastaus ei ole looginen esitys. Nämä perustuvat opiskelijan kykenemättömyyteen sisäistää tehtävän ratkaisemiseen vaadittavaa matemaattista ajattelua. Tehtävään vaadittava matemaattisen osaamisen ja ajattelun taso on opiskelijalla niin alhainen, ettei hän kykene erottamaan epäoleellista tietoa tehtävään sopivasta tiedosta. Rakenteettomalla tiedon tasolla oleva opiskelija saa vastauksestaan nolla pistettä.

Yksirakenteinen tieto (uni-structural) on vastaustiedon luokittelun toinen taso. Vastaus sisältää tietyn relevantin osatiedon, mutta vastaus on puutteellinen tai virheellinen muiden tietojen osalta. Opiskelijan on vaikeaa ymmärtää tehtävää kokonaisuudessaan. Hän yrittää rakentaa vastaustaan muistelemalla ulkoa tiettyjä asiayhteyteen kuuluvia seikkoja. Tämän puutteellisesti kehittyneen sisäisen mallinsa takia opiskelija ei kykene ratkaisemaan tehtävää oikein. Ratkaisemisen helpottamiseksi opiskelijalla on monesti taipumus yksinkertaistaa liikaa ratkaistavaa ongelmaa. Tehtävässä esiintyvät luvut ja operaatioiden lukumäärä ohjaavat myös ratkaisemiseen liittyviä vaikeuksia. Tehtävän laadusta riippuen opiskelijan ongelmat voivat olla joko ymmärtämis- tai menetelmävirheitä. Yksirakenteisen tiedon omaava opiskelija saa suorituksestaan yksi tai kaksi pistettä.

Kolmantena laadullisen vastaustiedon luokittelussa on *monirakenteinen tieto* (multi-structural), jolloin opiskelijan vastaus koostuu useista irrallisista, mutta vain sellaisista asiaan kuuluvista osista, jotka ovat johdonmukaisia valittujen johtopäätösten kanssa. Opiskelijan tekemät päätökset ovat yleensä valikoivia ja usein myös ennenaikaisia, mutta hän saa kuitenkin pääasiallisesti oikean tuloksen. Varsinkin lyhyiden tehtävien ratkaisut ovat virheettömiä. Opettajien laatimien kysymysten tason määrittely sekä tehtävien rakenne vaikuttavat suorituksen arviointiin. Opiskelija saa suorituksestaan korkeintaan viisi pistettä.

Vastaustiedon luokittelussa neljättä tasoa kutsutaan *konkreettien yleistysten tietämisen tasoksi* (rational). Tällöin kaikkea tai suurinta osaa relevanteista tiedoista käytetään tehtävän ratkaisussa. Opiskelija kykenee ratkaisemaan epäselvyydet ja ristiriitaisuudet yhdistelemällä käsitteitä ja ajatuksia, jotka koskevat tehtävässä käsiteltyä kontekstia. Tämän seurauksena opiskelijan on mahdollista muodostaa vakaat johtopäätökset, ja hän osaa tällöin muotoilla ongelmatilanteen sekä ratkaisun kokonaisuutena. Ratkaisumalli ei tuota ristiriitoja opitussa järjestelmässä, mutta systeemin ulkopuolella voidaan kokea ongelmia. Konkreettien yleistysten tietämisen tason saavuttanut opiskelija saa vastauksestaan neljästä kuuteen pistettä.

Abstraktin ajattelun käyttämisen taso on tiedon ja ajattelun luokittelun ylin taso. Tällöin opiskelijalla on laaja-alainen ymmärrys käsiteltävästä ilmiöstä, ja hän kykenee abstraktiin ajatteluun. Suoritus on loogis-matemaattinen, sekä tehtävänannosta puuttuvia perusoletuksia, vastaesimerkkejä ja uutta tietoa käytetään tehtävän ratkaisussa. Opiskelija pystyy muodostamaan ratkaistavasta ongelmasta useita vaihtoehtoisia malleja ja esittämään vastauksen usealla tavalla. Tällöin suorituksesta on mahdollista saada kuusi pistettä.

SOLO-luokituksen käyttö ei ole kuitenkaan yksikäsitteistä määritettäessä matemaattisen tiedon ja ajattelun tasoa. Arvioitaessa lyhyiden tehtävien suorituksia alimmat tasot, rakenteeton, yksirakenteinen ja monirakenteinen tiedon taso, sopivat kohtalaisen hyvin kuvaamaan opiskelijoiden tietämystä. Kahden ylimmän tason käyttäminen vaatii kuitenkin laaja-alaisten ongelmatilanteiden muotoilemista, portfolioita tai projektitöitä. Monesti matematiikan opetuksessa painotetaan oppimiskäsitystä, jossa algoritmien käyttämisen oppiminen olisi tärkeämpää kuin opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittäminen. Tehtävien ollessa laskutoimitusten harjoittelua eivät konkreettisen yleistyksen tietämisen taso ja abstraktin tiedon käyttämisen taso pääse tällöin esiin opiskelijoiden suorituksissa. (Yrjönsuuri, 2002)

3 MATEMATIIKAN OPPIMINEN JA OPETUS

Opetukselliset rakenteet ovat keskeinen tekijä matematiikan oppimiselle. Tämän takia on oleellista miettiä ja tutkia, minkälaiset oppimisympäristöt tukisivat mahdollisimman hyvin opiskelijoiden suoriutumista matematiikan opiskelussa sekä lisäisivät heidän matemaattista ymmärrystä ja osaamista. Tässä luvussa perehdytään tarkemmin matematiikan oppimiseen ja siihen vaikuttaviin tekijöihin. Keskeisenä ajatuksena on ongelmaperustaisten oppimisympäristöjen tuominen opetuksen keskiöön. Tämän lisäksi käsitellään yksilöllisten erojen vaikutusta opetukseen sekä niiden huomioimista opetusta suunniteltaessa.

Koulumatematiikasta yliopistomatematiikkaan siirtymistä ja vaikeuksia, joita opiskelijat tuolloin kokevat matematiikassa, käsitellään Näverin väitöskirjassa esitettyjen tulosten näkökulmasta. Tämän lisäksi tarkastellaan matematiikan kielentämistä ja virheellisten ratkaisujen käsittelemistä sekä esitellään Euroopan laajuisen Kassell projektin keskeisiä tuloksia matematiikan opetuksen hyvistä käytänteistä. Luvun loppupuolella tarkasteltavat matemaattiset oppimisvaikeudet eivät ole tämän tutkimuksen keskiössä, mutta silti niiden tiedostaminen on tärkeä näkökulma mietittäessä matematiikan oppimiseen vaikuttavia tekijöitä. Tutkimuksen keskeinen tausta-aineisto matematiikan tukitoimet käsitellään luvun lopussa.

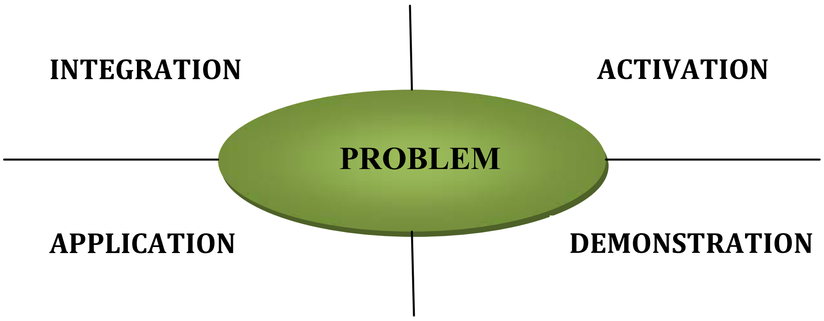
3.1 Oppimiseen vaikuttavia tekijöitä

Opiskelijan oppimisprosesseihin vaikuttavat monet osatekijät. Näitä ovat opetus, opetusmateriaali, yksilölliset erot sekä opiskeltava aihealue. Parhaan mahdollisen oppimisympäristön luominen edellyttää kaikkien osatekijöiden huomioimista opiskelutilanteessa.

3.1.1 Merrillin opetuksellisen toiminnan teoria

Opetus ja opetuksen sisältö muodostavat keskeisen kokonaisuuden onnistuneelle oppimiselle. Opetuksen sisältäessä ongelmanratkaisutehtäviä, jotka ovat käytännönläheisiä sekä opiskelijan omaan opiskeltavaan alaan kosketuksissa olevia, lisääntyy matematiikan opiskelun mielekkyys, ja tätä kautta opiskelijoiden matemaattisen osaamisen kasvu on todennäköisempää. Opetusta suunniteltaessa ja kehitettäessä Merrillin opetuksellisen toiminnan teoria sisältää keskeisiä näkökulmia oppimisen edistämiseksi.

Monet nykyiset opetukselliset mallit esittävät, että tehokkaimmat oppimisympäristöt ovat ongelmaperustaiset ympäristöt, joissa opiskelija osallistuu neljään erilliseen oppimisen jaksoon: (1) aikaisemman kokemuksen aktivointi, (2) taitojen esittely, (3) taitojen käyttäminen ja (4) näiden taitojen integrointi tosielämän toimintaan. *Kuva 2* havainnollistaa opetuksellisen diagrammin periaatteita. Monesti opetus keskittyy harjoittelussa ensisijaisesti taitojen esittelyyn ja jättää huomioimatta oppimisen kehän muut jaksot. (Merrill, 2001)



Kuva 2: *Opetuksellisen diagrammin periaatteet (Merrill, 2001)*

Merrillin opetukselliset näkökulmat perustuvat seuraaviin periaatteisiin:

- Oppiminen helpottuu, kun opiskelijat harjoittelevat tosielämän ongelmien ratkaisua
- Oppiminen helpottuu, kun olemassa oleva tieto aktivoidaan perustaksi uudelle tiedolle
- Oppiminen helpottuu, kun uusi tieto esitellään opiskelijalle
- Oppiminen helpottuu, kun opiskelija käyttää ja soveltaa uutta tietoa
- Oppiminen helpottuu, kun uusi tieto integroidaan opiskelijan maailmaan

Opetuksellisen toiminnan teorian viisi vaihetta onnistuneen oppimisen saavuttamiseksi esitellään seuraavaksi yksityiskohtaisemmin.

Ongelma (*Problem*)

Monet tämän hetkiset kognitiivisen psykologian tutkimukset osoittavat, että opiskelijat oppivat paremmin harjoittelemalla ongelmanratkaisua. Ongelmien pitäisi olla totuudenmukaisia, konkreettisia ja henkilökohtaisia jos mahdollista. Ongelmien ratkaisemiseen keskittyvä opetus on huomattavasti tehokkaampaa kuin abstrakteja oppimisobjekteja esittelevä opetus. (Merrill, 2001)

Opiskelijoiden mielenkiintoa pidetään parhaiten yllä siten, että kurssin tai asiakokonaisuuden alkaessa, heille näytetään minkälaisia tehtäviä he kykenevät ratkaisemaan kurssin suorittamisen jälkeen. Käsiteltävien ongelmien ei myöskään tulisi olla liian helppoja tai liian vaikeita. Jos sopivaa ratkaistavaa ongelmaa ei löydetä, voidaan vaikea tehtävä esittää antamalla tarvittavaa tukea ratkaisemisessa (Ullrich, 2003). Kun onnistuneiden tehtävien ratkaisuja verrataan välittömästi keskenään, opiskelijat kykenevät säätämään heidän ajatusmalliaan kyseisestä ongelmasta ja rakentamaan paremman abstraktin mentaalisen mallin, joka on paremmin siirrettävissä uusiin ongelmatilanteisiin. (Merrill, 2001)

Aktivointi (*Activation*)

Opiskelijan aktivointi uuteen aiheeseen ei pitäisi sisältää vain aikaisemmin esitettyjen aiheiden lukemista, vaan aktiivista aikaisemmin opitun informaation uudelleen aktivointia (Ullrich, 2003). Opiskelijoita ohjataan muistamaan, yhdistelemään, kuvailemaan tai soveltamaan relevanttia tietoa, jota voidaan käyttää uuden tiedon perustana. (Merrill, 2001)

Esittely (*Demonstration*)

Opiskeltava tieto voidaan esittää kahdella tasolla: yleisellä tasolla ja spesifisellä tasolla. Liian usein tieto esitellään ennemmin yleisellä tasolla kuin esimerkkien avulla. Oppiminen on parempaa, kun opiskelijalle näytetään esimerkkejä yleisen puheen ja teorian sijaan. Esittelyn olennainen tavoite on edistää tarvittavien ajatusmallien kehittymistä ongelmanratkaisussa. (Merrill, 2001)

Käyttäminen/soveltaminen (*Application*)

Kun opiskeltava tieto on esitelty opiskelijoille, on asianmukainen kyseisen käsitteen tai metodin harjoittelu merkittävä osa oppimisprosessia. Annetut tehtävät tulisi valita siten, että ne mahdollisimman hyvin ottavat huomioon oppimistavoitteet ja päämäärät. Palaute, virhediagnoosit ja korjaukset kuten myös tukeminen ovat tärkeitä elementtejä. (Ullrich, 2003)

Integrointi (*Integration*)

Merkittävä osatekijä oppimiselle on motivaatio. Opiskelijat ovat usein motivoituneimpia, jos he voivat esitellä saavuttamiaan taitoja itselleen tai julkisesti. Heillä pitäisi olla mahdollisuus pohtia, keskustella ja puolustaa heidän uutta tietoa. Opiskelumateriaalilla tulisi olla kosketuspintaa opiskelijoiden elämään. Tällöin oppiminen on mielekkäämpää ja motivoivampaa. (Merrill, 2001)

3.1.2 Yksilölliset erot

Samoin kuin jokainen yksilö on erilainen, sama aihealue tai oppimiskokemus voi johtaa erilaiseen oppimissuoritukseen jokaisella opiskelijalla. Yksilöllistä eroavaisuutta voidaan lähestyä kahdesta eri näkökulmasta, jotka ovat opiskelijan ominaisuudet (esimerkiksi kognitiivinen tyyli) ja ulkoiset olosuhteet. (Ullrich, 2003)

Kognitiivinen tyyli

Opiskelijan kognitiivinen tyyli heijastaa tapaa, jolla hän onnistuu oppimistehtävässään. Sitä pidetään yhtenä vakaimmista yksilön ominaisuutena, joka vaikuttaa hänen yleiseen suorittamiseen oppimistilanteissa. Opiskelijan kognitiivisella tyylillä on vaikutuksia sekä sisällön että esitystavan valitsemiseen. Jos opiskelija saa itse valita opiskelumateriaalinsa, hän valitsee ne, jotka parhaiten tukee hänen kognitiivista tyyliään. Tämä seikka näkyy myös opiskelijoiden arvioimisessa. Opiskelija kykenee parhaaseen mahdolliseen suoritukseen kokeessa, kun opiskelumateriaali on hänen kognitiivisen tyylinsä mukainen. (Ullrich, 2003)

Kognitiivinen tyyli sisällytetään yleisesti osaksi yksilön oppimistyyliä. Mutta käsitteenä se on paljon vakaampi verrattuna oppimistyyliin. Kognitiivinen tyyli voidaan määritellä yksilön johdonmukaisena lähestymisenä tai menettelytapana informaation järjestelemiseen ja käsittelemiseen oppimisen aikana. Sen vaikutukset tietyssä suoritustilanteessa ovat joko positiiviset tai negatiiviset riippuen annetun tehtävän luonteesta. Jotkin kognitiiviset tyylit sopivat paremmin tiettyihin tehtäviin ja kun taas toiset korostuvat erilaisissa tilanteissa. Kaiken kaikkiaan kognitiivinen tyyli heijastaa enemmänkin yksilöiden välisiä kvalitatiivisia kuin kvantitatiivisia eroja ajatusprosesseissa. (Riding & Sadler-Smith, 1997)

Oppimistyyliä tutkivan kirjallisuuden mukaan opiskelijoiden kognitiivisen tyylin eroavaisuudet jaetaan usein kahteen perustavanlaatuiseen ja riippumattomaan dimensioon; holistis-analyyttiseen ja verbaalis-visuaaliseen dimensioon. Kognitiivisen tyylin holistis-analyyttinen dimensio kuvaa yksilön tavanomaista tapaa jäsentää ja organisoida informaatiota. Jotkut yksilöt purkavat tiedon osiin (analyyttinen), kun taas toiset säilyttävät globaalin, kokonaisvaltaisen kuvan informaatiosta (holistinen). Holisteilla ongelmana saattaa ilmetä tietyn aiheen eri osien välisen eron hämärtyminen. Analyyttisillä yksilöillä kokonaisuuden erottelu osiin voi merkitä taas yhden näkökulman korostumista muiden kustannuksella, ja tällöin kyseisen seikan tärkeys on usein liioiteltua. Kognitiivisen tyylin verbaalis-visuaalinen dimensio heijastaa yksilön muistissa tapahtuvaa tavanomaista informaation esitystapaa ajatteluprosessin aikana. Verbaaliset yksilöt punnitsevat ja työstävät lukemaansa, näkemäänsä ja kuuntelemaansa informaatiota sanoin tai verbaalisin mielleyhtymin, kun taas toisaalta visuaaliset opiskelijat käyvät läpi toistuvia ja havainnollistavia mentaalisia kuvia lukiessaan, kuunnellessaan tai pohtiessaan informaatiota. (Riding & Sadler-Smith, 1997)

Nämä keskeiset kaksi kognitiivisen tyylin dimensiota vaikuttavat oppimistapahtumaan kahdella erillisellä tavalla. Holistis-analyyttinen dimensio vuorovaikuttaa toiminnan sisältöjen jäsentämisen ja rakentamisen kanssa, kun taas verbaalis-visuaalinen dimensio on vuorovaikutuksessa informaation esitysmuodon kanssa. Vaikka kognitiivinen tyyli ilmenee melko vakaana yksilön ominaisuutena, on kuitenkin mahdollista kehittää opiskelijan opiskelustrategioita siten, että ne mahdollisimman tehokkaasti tukisivat yksilön kognitiivisen tyylin vahvuuksia ja rajallisuuksia. Opiskelustrategiat voidaan jakaa ainakin kolmeen osaan, jotka voivat helpottaa oppimista tietyn kognitiivisen tyylin omaavalla opiskelijalla. Näitä ovat muokkaaminen (*translation*), sopeutuminen (*adaptation*) ja käsiteltävän kokonaisuuden yksinkertaistaminen (*reduction of processing load*). Esimerkiksi muokkaaminen pitää sisällään informaation uudelleen järjestelemisen sellaiseen muotoon, jonka avulla yksilön on helpompi käsitellä ja ymmärtää kyseistä tietoa. Tällöin esimerkiksi visuaalinen opiskelija voi ”muokata” tekstiä sisältävän sivun diagrammiksi, joka esittää saman informaation visuaalisessa muodossa, tai holistinen yksilö voi esimerkiksi käydä läpi kirjan luvut ja listata otsikot helpottaakseen kirjan rakenteen hahmottamista. (Riding & Sadler-Smith, 1997)

Gardnerin moniälykkyysteoria

Vuonna 1983 psykologi Howard Gardner julkaisi kirjansa Frames of Mind, jossa hän esittelee moniälykkyysteoriansa (The Theory of Multiple Intelligences). Gardner määrittelee lahjakkuuden (*intelligence*) biologisena ja psykologisena potentiaalina ratkaista ongelmia ja/tai luoda tuloksia, joita arvostetaan yhdessä tai useammassa kulttuurisessa kontekstissa. Tämän määritelmän pohjalta hän identifioi seitsemän suhteellisen autonomista lahjakkuutta: kielellinen, loogis-matemaattinen, musikaalinen, spatiaalinen, kehollis-kinesteettinen, interpersoonallinen ja intrapersoonallinen lahjakkuus. Tämä älykkyyden profiili on jokaiselle yksilölle ominainen, jolloin he omaavat toisista poikkeavan yhdistelmän eri lahjakkuuksia. Useimmissa viimeaikaisissa kirjoituksissaan Gardner on lisännyt kahdeksannen älykkyyden, naturalistisen lahjakkuuden ja on spekuloinut myös mahdollisen yhdeksännen, eksistentiaalisen lahjakkuuden olemassa olosta. (Gardner, 2009)

Kielellinen lahjakkuus on kyvykkyyttä käyttää kieltä oman ajatuksen ilmaisemisessa ja muiden ihmisten ymmärtämisessä. Ihmiset, jotka omaavat hyvin kehittyneen loogis-matemaattisen lahjakkuuden, ymmärtävät tietyn kausaalisen järjestelmän pohjimmaiset periaatteet tavalla, jolla tieteen tekijät niitä käsittelevät tai osaavat käsitellä numeroita, suureita ja operaatioita matemaatikoille tavanomaisella tyylillä. Spatiaalinen lahjakkuus viittaa taas kykyyn havainnollistaa ja sisäistää avaruudellista maailmaa yksilön ajatuksissa ja tätä lahjakkuutta voidaan hyödyntää niin taiteessa kuin tieteessäkin. Kehollis-kinesteettinen lahjakkuus kuvaa ihmisen kykyä käyttää omaa kehoaan tai joitakin ruumiinosia tietyn ongelman ratkaisemiseen tai jonkin asian tekemiseen. Ilmeisimmät esimerkit tällaisen lahjakkuuden omaavista henkilöistä ovat urheilijat, tanssijat ja näyttelijät. Musikaalisesti lahjakas ihminen omaa taidon jäsentää musiikkia, jolloin hänellä on kyky kuunnella, tunnistaa, muistaa ja käyttää musiikin rakenteita. Interpersoonallinen lahjakkuus ilmenee kykynä ymmärtää muita ihmisiä. Tämä on kyky, jota jokainen ihminen tarvitsee, mutta erityisesti se korostuu esimerkiksi opettajilla, poliitikoilla ja myyntitehtävissä olevilla henkilöillä. Seitsemäs lahjakkuuden laji on intrapersoonallisuus, joka kuvaa yksilön itsetuntemusta. Se heijastaa tietoutta yksilöstä itsestään, siitä mitä hän pystyy ja haluaa tehdä sekä miten hän reagoi eri asioihin. (Checkley, 2007)

Nämä lahjakkuudet muodostavat tyylejä, joilla yksilöt käsittelevät tietoa, säilyttävät ja ohjaavat kyseistä informaatiota ja havainnollistavat ymmärrystään itselleen ja muille. Gardnerin älykkyysteoriassa lahjakkuutta ei voida rinnastaa yksilön kognitiiviseen tyyliin, joka kuvaa hänen oletettavaa lähestymistapaansa erilaisiin asioihin. Sen sijaan moniälykkyysteoriassa on kysymys yksilöllisestä suhtautumisesta erilaisiin asiasisältöihin, kuten kieleen, musiikkiin tai muihin ihmisiin, ja tämä poikkeaa oleellisesti kognitiivisen tyylin käsitteestä. (Checkley, 2007)

Ulkoiset olosuhteet

Opiskeltava aihe, opetus, opiskelijan elämäntilanne ja hänen osaamisensa taso vaikuttavat myös oppimisprosessiin. Tämän takia opiskelumateriaalin tulisi olla linkittynyt opiskelijan arkielämään sekä opintojensa pääaineeseen, jolloin opiskeltava aihe tuntuisi mielekkäältä ja merkitykselliseltä. Materiaalin pitäisi vastata myös opiskelijan koulutuksellista tasoa, jolloin sisältö ja vaikeus kohtaisivat opiskelijan taidot kyseisessä aihealueessa. Jos materiaali on liian vaikeaa, aiheuttaa se vaikeuksia motivaation ylläpitämisessä. Liian helppo materiaali taas saattaa johtaa pitkästymiseen. (Ullrich, 2003)

3.2 Aritmetiikasta algebraan

Koulumatematiikassa kirjainlaskusta käytetään usein nimitystä algebra. Opettajat ja tutkijat ovat jo pitkään havainneet, että siirtyminen kouluaritmetiikasta algebran opiskeluun on yksi suurimmista esteistä, joihin opiskelijat törmäävät matematiikan opinnoissaan. Samalla tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että peruskoulun oppilaat ovat kykeneviä oppimaan ajattelemaan kouluaritmetiikkaa tavalla, joka kehittää aritmetiikan oppimista luomalla samalla pohjaa algebran opetukselle. On havaittu, että innovatiivinen opettajan ammatillinen kehittäminen ja uudelleen järjestetty matematiikan ohjeistus mahdollistavat jopa ensimmäisen ja toisen kouluasteen oppilaiden algebrallisen ajattelun kehittymisen. Vastaavasti korkeammilla kouluasteilla nuorten oppilaiden on havaittu kykenevän tekemään yleistyksiä ongelman alla piilevästä aritmeettisesta rakenteesta ja ominaisuuksista pohjautumalla algebraan. Tutkimukset ovatkin osoittaneet, että tukemalla opettajien ammatillista kehittymistä järjestelmällisesti auttamalla heitä fokusoimaan opetusta matemaattisen ajattelun kehittämiseen, algebran perusteiden rakentaminen voidaan aloittaa lapsille ja nuorille jo paljon aiemmin kuin se tämän päivän opetussuunnitelmassa on määritetty. (NCISLA, 2000)

Viime vuosikymmeninä on tutkittu paljon siirtymistä numeerisen tason lausekkeista rakenteiltaan samanlaisille yleisen tason lausekkeille. Monilla opiskelijoilla on numeerisen tason ja yleisen tason käsitysten välillä syvä ontologinen kuilu. Syynä tähän voi olla ensiksikin symbolista algebraa vastaavien numeeristen rakenteiden osaamattomuus. Tällöin käsitteenmuodostusprosessi on jäänyt kesken numeerisella tasolla. Toinen syy tähän saattaa olla aritmetiikan opetus, jos se on tähdännyt pelkästään laskuprosessin tuloksiin rakenteellisten aspektien sijasta. (Näveri, 2009)

Lukuisat esteet aiheuttavat opiskelijalle vaikeuksia siirryttäessä aritmetiikasta algebraan. Algebrallisen lausekkeen hahmottaminen vastauksena on monille opiskelijoille haasteellista, koska he ovat tottuneet lukuarvovastauksiin. Kykenemättömyyttä spontaaniin operointiin tuntemattomilla pidetään aritmetiikan ja algebran välisenä kuiluna. Tämän seurauksena opiskelijat käyttävät sääntöjä ja proseduurimaista laskemista ilman, että he tiedostavat, minkä takia näin tehdään, ja mihin menettelytavat perustuvat. (Näveri, 2009)

Koulumatematiikan keskeistä relaatiota, suhdetta, korostetaan yhtenä tärkeimmistä formaalin ajattelun komponenteista. Kyseisen taidon kehittyminen on kuitenkin todettu luultua hitaammaksi. Opiskelijat kokevat murtolukukäsitteeseen liittyvän suhdeajattelun ongelmalliseksi. Murtolukuihin voidaan yhdistää useampi käsiteluokka, kuten esimerkiksi murtoluvulle ½: objektikäsite (ilmaus ”puoli”), operaatiokäsite (”puolet jostakin”) ja suhdekäsite (lukujen 1 ja 2 suhde tai jakolasku 1:2). Näiden käsiteluokkien rinnakkainen oppiminen vaatii paljon harjaantumista. Laskimen käyttö koulumaailmassa on vielä omiaan lisäämään murtolukukäsitteen hankaluuksia ja sekaannuksia. Suhdeajattelun oppimiseen tulisi kiinnittää huomiota enemmän, koska se on yksi avainkäsitteistä matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa aina alakoulusta yliopistoon. (Näveri, 2009)

3.3 Matematiikan kielentäminen

Opetuksen keskeisenä lähtökohtana uusia matemaattisia käsitteitä opiskeltaessa tulee olla opiskelijoiden olemassa olevien tietojen ja osaamisen tiedostaminen. Tämän lisäksi uuden opiskeltavan asian pitää olla merkityksellistä opiskelijoille. Eri tutkimuksista saadun tiedon perusteella matemaattisia käsitteitä opetettaessa toimintamateriaalin käyttö opetusvälineenä on hyvin tehokas keino oppimisessa. Opiskelija luo opeteltavasta käsitteestä mentaalimallia juuri toimintamateriaalien ja aiheeseen liittyvien esimerkkien avulla. Kun opiskelija ilmaisee käsitteen sisältöä valitsemallaan tavalla, esimerkiksi puhumalla omalla terminologiallaan tai piirtämällä, niin opettaja pystyy saamaan kuvan kyseisen opiskelijan käsitteen ymmärtämisestä. Keskeinen osa opiskelijan matemaattisen käsitteen konstruointiprosessia on kielentäminen. Tällöin opiskelija ilmaisee käsitteen sisältöä muille opiskelijoille ja opettajalle. Matemaattisten käsitteiden kielentäminen auttaa pohtimaan käsitteen keskeisiä piirteitä sekä jäsentämään opiskelijan matemaattista ajattelua. Muiden opiskelijoiden on tällöin myös mahdollisuus verrata omia käsityksiään toisen opiskelijan näkemykseen ja sitä kautta muovata omaansa sekä muiden opiskelijoiden matemaattista ajattelua ja uskomuksia. (Joutsenlahti, 2004)

Opettajan tärkeänä tehtävänä on suunnitella tarkoin harkitusti tarkoituksen mukaiset opetusjärjestelyt, jotka sisältävät toimintamateriaaleja, esimerkkejä ja malleja. Opettajan tulee myös sallia opiskelijan ilmaista matemaattisen käsitteen opiskelijan omalla tavalla. Tämän kielentämisen avulla sekä seuraamalla opiskelijan toimintaa opettaja pystyy arvioimaan opiskelijan ajatteluprosesseja sekä hänen matemaattista ymmärrystään. Kannustamalla myös epäformaalin kielen käyttöön opettajalla on mahdollisuus päästä kaikkein lähimmäksi opiskelijan ajattelua. Tätä kautta opettaja pystyy parhaiten muokkaamaan opetusjärjestelyitä oppimista helpottavampaan suuntaan. (Joutsenlahti, 2004)

Kielentämistä rajoittaa usein opiskeluryhmän suuri koko, jolloin on mahdotonta jokaisen opiskelijan saada kielentää omaa matemaattista ajatteluaan. Tämä seikka korostuu eniten yliopistomaailmassa, jossa luentoryhmät ovat todella suuria ja opiskeltavan asian määrä on melko laaja. Usein järjestelyt johtavatkin siihen, että luennoitsija esittää käsiteltävät asiat, ja opiskelijat kuuntelevat puhetta ja tekevät tarvittavia muistiinpanoja. Tämän takia keskeistä olisi, että opiskelijoita kehotettaisiin kirjoittamaan matemaattista ajatteluaan sekä ratkaisujaan omiin muistiinpanoihinsa. Tällä tavoin tehtävän ratkaisu ei jää pelkäksi kaavojen kokoelmaksi ja laskutoimitusten sarjaksi. Samalla opiskelijalla on mahdollisuus jäsentää paremmin omaa vastaustaan ja ajatteluaan. (Joutsenlahti, 2004)

3.4 Virheelliset esimerkit osana matematiikan oppimista

Monesti koulumaailmassa keskitytään ensisijaisesti oikeiden vastausten muodostamiseen käsiteltävästä ongelmasta, jolloin virheet usein jätetään vähemmälle huomiolle. Virheellisten vastausten käsitteleminen ja korostaminen tärkeänä osana oppimista voi auttaa muokkaamaan perinteisiä käsityksiä matematiikan oppimisesta ja opettamisesta. (Melis, 2006)

Pedagogiset tutkimukset esittävät, että virhekulttuurin laajempi luominen koulumaailmaan parantaa monia oppimisen edellytyksiä sekä opiskelijoiden suoriutumiskykyä. Esimerkiksi se ehkäisee opiskelijoiden levottomuutta ja pelkoa, parantaa luontaista motivaatiota, kehittää opiskelijan oma-aloitteisuutta ja tehokkuutta sekä vähentää menestymisen ja epäonnistumisen välistä vastakkainasettelua. (Melis, 2006)

Virheiden etsiminen, selittäminen ja korjaaminen (jonkun toisen) ratkaisusta voi edistää opiskelijan kykyä perustella itsenäisesti matemaattisia aiheita ja väittämiä. Virheet voivat toimia myös kyselevän opiskelun lähteenä, jolloin opiskelijan tulee tarkastella käsiteltävää ongelmanratkaisualuetta, miettiä vaihtoehtoja, löytää riippuvuuksia sekä hahmottaa käsiteltävän ongelman ydin. Tällöin opiskelijalta vaaditaan ennemminkin kykyä analysoida ratkaisua kuin soveltaa ulkoa opeteltuja sääntöjä. Tämän lisäksi virheellisten esimerkkien avulla voidaan harjoitella kriittistä ajattelua. Virheiden käsittely vaatii usein opiskelijoita tarkastelemaan esimerkkiä useasta näkökulmasta ongelman ratkaisemiseksi. Virheiden esittäminen saattaa olla myös olennainen tekijä opiskelijan oman virheellisen käsityksen korjaamisessa. Opiskelijat voivat harjoitella tällä tavalla ratkaisujen perustelemista, joka koetaan monesti hyvin vaikeana osana matematiikan opiskelua. Tällainen uudenlainen tehtävämuoto voi motivoida opiskelijoita sekä tuntua mielekkäältä, jolloin sillä on selkeä vaikutus opiskelijoiden asenteisiin. Monesti oman virheellisen ratkaisun käsittely yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa voi synnyttää kielteisiä tuntemuksia. Tämän takia jonkun toisen virheellisen ratkaisun analysoiminen voi olla emotionaalisesti miellyttävämpi tehtävä. (Melis, 2006)

3.5 Kassel-projekti, matematiikan opettaminen

Kassel-projekti suunniteltiin vertaamaan matemaattista kehittymistä toisen asteen kouluissa eri puolilla Eurooppaa. Pyrkimyksenä oli määrittää tekijöitä, jotka edesauttavat matemaattisen kehityksen edistymistä, sekä löytää hyviä käytänteitä matematiikan opetukselle ja oppimiselle. Seuraavat opetukselliset näkökulmat nousivat esille (CIMT, 2005):

- Opetettuja peruskäsitteitä ja periaatteita tulee painottaa selkeästi ja täsmällisesti. Sopivien esimerkkien ja sovellusten käyttäminen edesauttaa näiden käsitteiden oppimista.
- Opettajan tulisi käyttää virheetöntä ja täsmällistä kieltä puhuessaan ja kirjoittaessaan matematiikkaa.
- Laskimien käytön tulisi olla rajoitettua, kontrolloitua ja tehokasta.
- Koko luokan interaktiivista opetusta tulisi painottaa enemmän. Tällöin itsenäisen työskentelyn määrää oppituntien aikana tulee vähentää, kun taas koko luokan yhteistä etenemistä pitäisi lisätä.
- Kotitehtävät ovat oppimisen avaintekijä.
- Yksittäisen opiskelijan väärinkäsitykset ja virheet ovat tärkeitä opetuksellisia seikkoja koko luokalle. Tämän takia virheellisiä ratkaisuja on tärkeää käydä läpi koko luokan kesken, koska silloin muidenkin opiskelijoiden virheellinen käsitys tietyn käsitteen tai periaatteen sisällöstä ja tarkoituksesta voi korjaantua.

3.6 Matemaattiset oppimisvaikeudet

Vaikka tämän tutkimuksen keskiössä eivät ole matemaattiset oppimisvaikeudet, on niiden tiedostaminen kuitenkin tärkeä näkökulma. Matemaattisia oppimisvaikeuksia ei ole tutkittu yhtä laajasti kuin esimerkiksi lukemiseen liittyviä oppimisvaikeuksia ja tämän takia muun muassa yliopistotason opiskelijoille kohdistettuja tutkimuksia liittyen matemaattisiin oppimisvaikeuksiin on toteutettu hyvin vähän jos ollenkaan. Matemaattispainotteiset teknilliset yliopistot ja korkeakoulut ovat todennäköisesti opiskelupaikkoina sellaisia, joissa matemaattiset oppimisvaikeudet eivät ilmene kovin laaja-alaisesti, mutta jonkin asteisena niitä voi toki esiintyä myös kyseisissä oppilaitoksissa. Tämän takia matemaattisten oppimisvaikeuksien tiedostaminen on tarpeellista selvitettäessä opiskelijoiden matematiikan opiskeluun ja sen vaikeuteen liittyviä tekijöitä.

Tutkittaessa oppilaiden matemaattisia kykyjä ja taitoja voidaan havaita, että on olemassa henkilöitä, jotka ovat kykenemättömiä omaksumaan matemaattisia taitoja normaaliin tapaan. Ongelmia saattaa ilmetä esimerkiksi yksinkertaisten laskutoimitusten, kuten kertolaskutaulujen, muistamisessa tai erilaisten matemaattisten operaatioiden sisäistämisessä. Jotkin oppilaat kokevat vaikeuksia esimerkiksi numerokäsitteen ymmärtämisessä tai eivät kykene kirjoittamaan, lukemaan tai tunnistamaan oikeata matemaattista merkkiä tietylle sanalle (Shalev, ym., 2001). Yleensä matemaattisista oppimisvaikeuksista puhuttaessa tarkoitetaan lapsen tai nuoren poikkeuksellisen työlästä peruslaskutaitojen oppimista. Joten matemaattisilla oppimisvaikeuksilla ei tarkoiteta monimutkaisten matemaattisten taitojen puutetta. (Niilo Mäki Instituutti, 2009)

Matemaattiset oppimisvaikeudet ovat yleisiä, merkittäviä ja vakavan opetuksellisen huomion arvoisia. Oppilaan toistuvat epäonnistumiset saattavat johtaa yrittämisen puutteeseen, heikentyneeseen itseluottamukseen ja välttelevään käytökseen (Garnett, 1998). Vaikka kiinnostus matemaattisia oppimisvaikeuksia kohtaan on kasvanut viime vuosina, ovat aihetta käsittelevät tutkimukset kuitenkin edistyneet huomattavasti hitaammin kuin lukemiseen liittyvien oppimisvaikeuksien tutkimus. Eräs selittävä tekijä kyseiselle asialle on matematiikan mosaiikkimainen luonne, joka vaatii oppilaalta laajenevien aihealueiden ja taitojen hallintaa hänen kasvaessaan vanhemmaksi. Tämän seurauksena matemaattiset oppimisvaikeudet saavat hyvin moninaisia ilmenemismuotoja. (Rousselle & Noël, 2007)

Matemaattisiin taitoihin vaikuttavat oppimisvaikeudet vaihtelevat vähäisistä ongelmista aina hyvin laajoihin ja vakaviin vaikeuksiin. Yleisimpiä vaikeuksia esiintyy yksinkertaisten aritmeettisten tosiasioiden tehokkaassa muistamisessa ja laskemiskyvyn luotettavuudessa. Kun näitä ongelmia vielä täydentää matematiikan voimakas käsitteellisyys, on hyvin tärkeää, että tällaisten oppilaiden kohdalla ei takerruta pelkästään tukiopetuksen antamiseen laskemisessa. (Garnett, 1998)

Monet nuoret kokevat vaikeuksia arkielämässä tarvittavan matematiikan ja koulumatematiikan yhdistämisessä. Asioiden välisen yhteyden rakentaminen vaatii aikaa, kokemusta ja tarkasti ohjattua opetusta. Jäsenneltyjen ja konkreettisten materiaalien käyttö auttaa näiden yhteyksien turvaamisessa, ei ainoastaan peruskoulun puolella mutta myös korkeamman matematiikan ymmärryksen kehittymisessä. Opetuksessa tulisi kiinnittää erityistä huomiota esimerkiksi erilaisten kirjoitettujen muotojen merkityksen korostamiseen, erilaisiin tapoihin lukea matemaattista tekstiä sekä esitysmuotojen sisäistämiseen. (Garnett, 1998)

3.6.1 Matemaattisten oppimisvaikeuksien eri ilmenemismuodot

Henkilöt, jotka kärsivät vaikeuksista matematiikassa, kokevat usein suurta turhautumista omia kykyjään ja matematiikkaa kohtaan. Nopeat vaihtelut toivon ja epätoivon välillä ovat hyvin yleisiä tuntemuksia kyseisille oppilaille. On mahdollista, että tietyllä hetkellä oppilas kykenee suoriutumaan hänelle annetusta matemaattisesta tehtävästä, mutta hetkeä myöhemmin, esimerkiksi seuraavana päivänä, hän epäonnistuu eikä kykene suorittamaan täsmälleen samaa tehtävää. Ajoittain vaativampienkin tehtävien ratkaiseminen saattaa onnistua kohtalaisen nopeasti, kun taas toisinaan yksinkertaiset laskutehtävät tuottavat suuria ongelmia. Oppilaalla saattaa olla vaikeuksia muistissa olevan informaation palauttamisessa mieleen, joten hänen täytyy todella keskittyä saadakseen varastoituneen tiedon käyttöönsä. Edellä mainitut tilanteet ovat esimerkkejä niistä ongelmista, joita jotkin oppilaat joutuvat kohtaamaan. Tämän takia on hyvin ymmärrettävää, että tällaisten ongelmien kanssa elävät henkilöt saattavat todella kyllästyä ja turhautua matematiikkaan ja sen opiskeluun. (Adler, 2001)

Jotkin oppilaat kohtaavat vaikeuksia numeroiden järjestämisessä suuruuden perusteella tai lukujen vertailemisessa. Tällöin oppilaalla on ongelmia hahmottaa esimerkiksi, että tuleeko 16 ennen vai jälkeen lukua 17, tai oppilas ei pysty automaattisesti ymmärtämään, että esimerkiksi 74 on viisi enemmän kuin 69 (Adler, 2001). Osa matemaattisista oppimisvaikeuksista kärsivistä oppilaista omaa erinomaisen matemaattisten käsitteiden ymmärryksen, mutta suoriutuvat laskemisesta ailahtelevasti. He kiinnittävät vaihtelevasti huomiota matemaattisissa operaatioissa käytettäviin merkkeihin tehden virheitä ja approksimaatioita. Kyseiset oppilaat kykenevät siis muodostamaan vaativammankin matemaattisen ongelman ratkaisumetodit, mutta laskutoimitusten suorittaminen on puutteellista. Aritmeettisten heikkouksiensa takia osalle lapsista ja nuorista järjestetään matematiikassa erityisiä tukitoimia peruskouluvuosien aikana, jolloin laskennallinen täsmällisyys on voimakkaasti painotettua matematiikassa. Siirryttäessä matematiikassa korkeammalle ja abstraktimmalle tasolle, jolloin korostuu henkilön käsitteellinen kyvykkyys, kyseiset oppilaat suoriutuvat matemaattisista ongelmista hyväksyttävällä tasolla. Koska matematiikka pitää sisällään paljon muutakin kuin oikeaan numeeriseen vastaukseen tähtäävää laskentoa, on tärkeää arvioida laaja-alaisesti matemaattisia taitoja, eikä pelkästään keskittyä havainnoimaan oppilaan kykyjä ja ymmärrystä alhaisemman tason taidoissa. (Garnett, 1998)

Usein oppilaiden kokemaa epäselvyyttä kirjoitetun matematiikan merkintätapojen yleisiä käytäntöjä kohtaan vahvistetaan erilaisten työkirjojen avulla tapahtuvalla harjoittelulla. Niissä oppilas oppii toimimaan ennemminkin ongelmiin vastaajana kuin matemaattisten ideoiden esittelijänä. Jotkin oppilaat kokevat vaikeuksia matemaattisten symbolien ja merkintöjen kirjoitettua ulkoasua kohtaan. Oppilaalla saattaa ilmetä ongelmia esimerkiksi samalta näyttävien lukujen hahmottamisessa tai ongelmia karttojen, diagrammien ja taulukoiden lukemisessa. Tällöin on tärkeää kiinnittää huomiota, minkälaisia sivujen ulkoasut ja tehtävät ovat rakenteeltaan. Oppilas, jolla on esimerkiksi vaikeuksia matemaattisten symbolien hahmottamisessa vaaka- ja pystysuunnassa sekä monivaiheisten algoritmien jäsentämisessä, tarvitsee paljon kokemusta ja harjoittelua siirtyessään tietystä muodosta tai kaavasta toiseen. Opettaja voi auttaa kyseisiä oppilaita esimerkiksi käyttämällä selkeyttäviä laatikoita tai muuttamalla ongelma kuvamuotoon. Myös erilaiset konkreettiset materiaalit ovat tärkeitä opetuksen tavoitteiden saavuttamisessa. Ne ovat eräs mahdollisuus syvällisemmän matemaattisen ymmärryksen kehittämiseen. Konkreettiset materiaalit auttavat ymmärtämään paremmin matemaattisia käsitteitä sekä soveltamaan niitä jokapäiväiseen elämään. (Garnett, 1998)

Osa matemaattisista oppimisvaikeuksista kärsivistä oppilaista kohtaa vaikeuksia matematiikan kielessä. Tällöin sekaannusta aiheuttaa terminologia sekä sanallisten selitysten seuraaminen. Myös monimutkaisten laskujen vaiheiden seuraaminen tuottaa vaikeuksia kyseisille henkilöille. Tällöin on tärkeää, että opettajan ulosanti on selkeää ja tarpeeksi hidasta sekä oleellisia asioita painottavaa, jotta oppilaat pystyvät sisäistämään mahdollisimman hyvin käsiteltävän aiheen. Matematiikan opiskelu keskittyy usein matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen matemaattista esitysmuotoa käyttäen. Liian usein matematiikan tunnit sisältävät pelkästään opettajan selityksiä tai hiljaisia itsenäisiä harjoituksia. Tämän takia oppilaiden on hyvin vaikeaa kertoa suullisesti tai sanallisesti kirjoittamalla, mitä he ovat tekemässä ja minkä takia. Olisi hyvin tärkeää, että kyselevä ja keskusteleva opetusmuoto tuotaisiin osaksi matematiikan opetuksen keskiötä. Tällöin oppilaita pyydettäisiin kertomaan sanallisesti, mitä he ovat tekemässä ratkaistessaan tiettyä matemaattista ongelmaa. Tämä on hyvin tärkeää varsinkin niille oppilaille, jotka kokevat vaikeuksia matematiikan kielen kanssa. (Garnett, 1998)

Toisaalta kulttuurilliset ennakkoasenteet matematiikan taitoja kohtaan elävät hyvin voimakkaana monissa maissa. Usein ajatellaan, että henkilöt, jotka ovat hyviä matematiikassa, omaavat poikkeuksellisen älykkyyden. Matematiikan hallinta on monien mielestä tyrmistyttävää ja jopa halveksittavaa. Yleinen asenne heijastaa ajatusmaailmaa, jossa on yhteiskunnallisesti hyväksyttävää olla heikko matematiikassa. (University of Western Ontario, 2008)

3.6.2 Matemaattisten oppimisvaikeuksien yleisyys

1980-luvulla N. Badian suoritti laajan tutkimuksen, joka osoitti, että 6,4 prosenttia peruskoululaisista kärsii vaikeuksista laskemisessa ja muissa matemaattisissa tehtävissä. Samanaikaisesti 4,9 prosentilla oppilaista oli ongelmia lukemisessa. Tutkimus osoitti siis, että matemaattisista vaikeuksista kärsivien oppilaiden joukko on hyvin suuri, jopa suurempi kuin lukemisesta kärsivien lasten ja nuorten ryhmä. Tämä on hyvin ymmärrettävää, sillä matemaattisten asioiden ymmärtäminen ja hallinta vaativat useita erillisiä taitoja, sisältäen lukemisen taidot ja hallinnan, joiden kaikkien tulee toimia yhdessä. (Badian, 1983)

R. Shalev ja V. Gross-Tsur johtivat taas laajaa tutkimusta aiheesta 1990-luvulla. Tutkimukseen osallistui 3000 koululaista, ja se diagnostisoi 6,2 prosentilla oppilaista olevan matemaattisia oppimisvaikeuksia. He osoittivat myös, että näistä oppimisvaikeuksista kärsivien oppilaiden joukossa oli yhtä paljon sekä tyttöjä että poikia. Tämä tutkimustulos poikkeaa muista oppimisvaikeuksista, kuten lukihäiriöstä, joissa poikien osuus on yleensä tyttöjä suurempi. (Gross-Tsur;Manor;& Shalev, 1996)

Nykypäivänä matemaattisten oppimisvaikeuksien yleisyydestä tehdyt arviot eri maissa vaihtelevat 5-8 prosentin välillä riippuen siitä, kuinka tiukkaa kriteeriä käytetään. (Niilo Mäki Instituutti, 2009) Vanhemmat ja opettajat ovat usein tietämättömiä matemaattisten oppimisvaikeuksien yleisyydestä. Tutkimukset ovat siis osoittaneet, että oppimisvaikeudet ovat yhtä yleisiä oppilaiden keskuudessa kuin lukivaikeudet. Tämän takia on hyvin tärkeää, että matemaattisten oppimisvaikeuksien yleistä tietoutta kasvatetaan. (University of Western Ontario, 2008)

Israelilainen lasten neurologi R. Shalev on osoittanut tutkimuksissaan (Shalev, 2004), että noin 25 prosentilla matemaattisista oppimisvaikeuksista kärsivistä henkilöistä on myös dyslexia eli lukihäiriö. B. Adlerin tutkimukset kertovat taas, että luku olisi hieman suurempi; 30 prosenttia ihmisistä kokevat ongelmia sekä lukemisessa että laskemisessa. Silti suuri osa matemaattisista oppimisvaikeuksista kärsivistä oppilaista kohtaa vaikeuksia vain matematiikassa. Heillä on siis hyvin spesifinen oppimisvaikeus, ja useat heistä ovat todella hyviä lukemisessa ja eri kielten hallinnassa (Adler, 2001). Räsänen ja Ahonen ovat myös tutkineet kyseistä aihetta. Heidän laajan aineiston perusteella muodostettu arvio kertoo, että lukemisen ja laskemisen vaikeuksien päällekkäisyyttä ilmeni 43 prosentilla tutkimukseen osallistuneista. Tutkimus suoritettiin 9 – 12 – vuotiaille suomalaisille oppilaille. (Ahonen & Räsänen, 1995). Eri tutkimusten välillä olevat erot selittyvät esimerkiksi kulttuurisilla tekijöillä, tutkimuksissa käytetyillä erilaisilla mittareilla sekä osaamistasokriteereillä (eli ketkä on määritelty matemaattisista oppimisvaikeuksista kärsiviksi oppilaiksi).

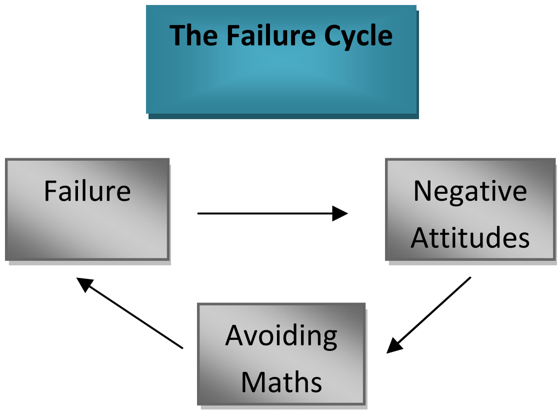
3.7 Tukitoimet osana matematiikan opetusta

Viime vuosien aikana on havaittu niin Suomessa kuin Euroopan laajuisestikin, että opiskelijoiden matematiikan osaamisen taso on heikentynyt. Useat opiskelijat kokevat suuria vaikeuksia matematiikan opinnoissa siirryttäessä koulumatematiikasta yliopistoissa käsiteltävään matematiikkaan. Tämän seurauksena eri yliopistot ja korkeakoulut ympäri Eurooppaa ovat kehittäneet matematiikan tukijärjestelyitä sekä toimintamalleja kyseisten opiskelijoiden auttamiseksi.

3.7.1 Opetuksen muutokset ja tukitoimet - avaintekijät matematiikan opinnoissa menestymiseen

Harper Adams University Collegessa havahduttiin useita vuosia sitten, kuten myös monessa muussakin oppilaitoksessa, uusien opiskelijoiden matemaattisten taitojen heikentymiseen. Puutteellisen osaamisen seurauksena suorittamattomien insinöörimatematiikan opintojen määrä kasvoi korkeaksi. Tilanteen parantamiseksi toteutettiin useita muutoksia niin luentotasolla kuin myös erillisen tukiopetuksen tarjoamiseksi. Monilla opiskelijoilla ongelmana ei ollut vain heikot pohjatiedot, mutta myös luottamuksen puute omia matematiikan taitoja kohtaan. Oleellinen seikka oli myös dyslexiasta kärsivien opiskelijoiden huomioiminen. (Parson, 2005)

Harper Adams tiivisti seuraavasti keskeisimmät matematiikan opiskelussa vaikeuksia aiheuttavat tekijät sekä niiden seuraukset. Opiskelijan vaikeuksiin matematiikan opinnoissa vaikuttavat puutteelliset pohjatiedot. Tämän rinnalla merkittävänä tekijänä on yleinen huoli ja pelko matematiikan kurssien suorittamisesta ja läpäisemisestä. Vaikeuksien seurauksena matematiikan kurssien koearvosanat olivat heikkoja erityisesti ensimmäisen vuoden opiskelijoilla. Merkittävä tekijä oli myös opintojen viivästyminen, joka johtui usein matematiikasta. Osaamisen puute ja epäonnistuminen matematiikassa ovat omiaan muodostamaan opiskelijalle kielteistä suhtautumista koko matematiikkaa kohtaan. Tämä taas johtaa matematiikan välttelyyn, joka edelleen edesauttaa seuraavien epäonnistumisten tuntemuksia. Alla oleva *Kuva 3* esittää kyseistä epäonnistumisen kehää matematiikassa. (Parson, 2005)



Kuva 3: *Epäonnistumisen kehä (Parson, 2005)*

Muutokset toteutettiin Harper Adams University Collegessa lukuvuoden 2001–2002 aikana, ja ne pitivät sisällään matematiikan tukipalvelut, luentorakenteen muutokset sekä lähtötasotestin, jonka avulla tunnistettiin matematiikassa heikosti menestyvät opiskelijat. Luentoja muokattiin siten, että ne eivät noudattaneet enää perinteistä rakennetta, vaan olivat sekoitus luennointia ja opetusta. Tällöin osa luentoajasta käytettiin opiskelijoiden itsenäiseen työskentelyyn. Näin opiskelijat pääsivät välittömästi harjoittelemaan opiskeltavaa teoriaa ja metodeita. Luentoryhmiä muokattiin myös siten, että opiskelijat jaettiin ryhmiin heidän tutkintonsa mukaisesti (BEng-, BSc- ja HND-opiskelijat erillisissä luentoryhmissä). Opiskelijoille tarjottiin myös tulostettavia luentomuistiinpanoja, jotka sisälsivät teoriaosuuksia, malliesimerkkejä sekä ratkaistavia tehtäviä. Opiskelijoiden ensimmäinen lukukausi suunniteltiin siten, että matematiikan opinnot aloitettiin kertaavalla osiolla, esimerkiksi palauttelemalla mieleen perusalgebraa. Kertausosiosta siirryttiin kuitenkin melko nopeasti uusiin, haastavampiin matematiikan aihealueisiin. Tällä tavoin opintojen alku saatiin monelle opiskelijalle helpommaksi ja myönteisemmäksi kokemukseksi kuitenkaan käytävistä aihealueista tinkimättä. (Parson, 2005)

Matematiikan tukitoimien parantamiseksi palkattiin tutoreita, jotka ohjasivat säännöllisesti pienryhmien toimintaa sekä järjestivät henkilökohtaisia tapaamisia niiden opiskelijoiden kanssa, jotka tarvitsivat erityistä tukea matematiikan opinnoissaan. Seuraavassa on tiivistetty tukitoimien keskeinen sisältö (Parson, 2005):

- Säännölliset pienryhmäajat opiskelijoille
- Henkilökohtaiset tapaamiset opiskelijoiden kanssa
- Kertaustunnit
- Teorian uudelleenselittäminen lähtien liikkeelle perusasioista
- Opiskelijoille sopiva etenemistahti, jolloin aikaa jää myös miettimiselle
- Havaintoesimerkkien ja kuvien käyttäminen aina kun on mahdollista
- Iloinen ja ystävällinen tyyli opiskelijoita kohdatessa
- Kärsivällisyyden korostuminen ohjauksessa

Toteutetut muutokset ovat tuottaneet merkittävää edistystä sekä opiskelijoiden suhtautumisessa matematiikkaa kohtaan että matematiikan opintojen suorittamisessa. Kurssit hyväksytysti suorittaneiden opiskelijoiden lukumäärä nousi huomattavasti aikaisempaan tilanteeseen verrattuna. Alla oleva *Taulukko 1* esittää tilastoja tenttien läpipääsyprosenteista ennen muutoksia ja muutosten jälkeen. Ylempi taulukko kuvaa opiskelijoiden läpäisyprosentteja ensimmäisen ja toisen lukukauden aikana ennen toteutettuja muutoksia. Alemmassa taulukossa on puolestaan esitetty samaiset luvut muutosten jälkeen lukuvuosina 2002/3, 2003/4 ja 2004/5.

Taulukko 1: *Ylempi taulukko kuvaa opiskelijoiden läpäisyprosentteja ensimmäisen (Semester 1) ja toisen lukukauden (Semester 2) aikana ennen toteutettuja muutoksia. Opiskelijat on jaettu HND- ja Degree- opiskelijoiksi suoritettavan tutkinnon perusteella. Alemmassa taulukossa on puolestaan esitetty samaiset luvut muutosten jälkeen lukuvuosina 2002/3, 2003/4 ja 2004/5. Opiskelijat on jaettu BEng (Bachelor of Engineering)-, BSc (Bachelor of Science)- ja HND-opiskelijoiksi suoritettavan tutkinnon perusteella. (Parson, 2005)*

Tulokset ennen muutoksia – lukuvuosi 1999/2000:

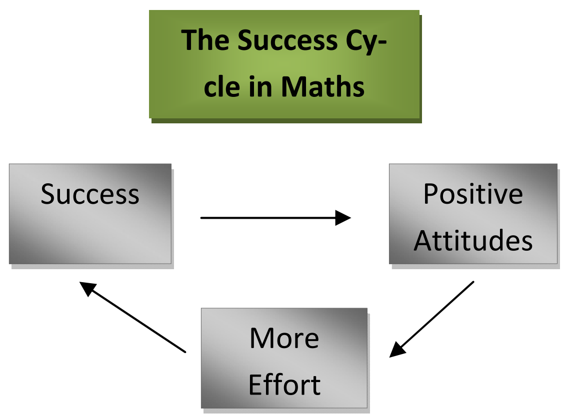
	Mean student examination percentages	
	Semester 1	Semester 2
HND	**49.1**	**31.1**
Degree	**53.7**	**45.7**

Tulokset muutosten jälkeen – vuodet 2002/3 – 2004/5 :

		Mean student examination percentages		
		2002/3	2003/4	2004/5*
BEng	Semester 1	**79.6**	**82.2**	**83.1**
	Semester 2	**70.5**	**73.1**	
BSc	Semester 1	**73.5**	**73.9**	**67.8**
	Semester 2	**66.9**	**57.8**	
HND	Semester 1	**64.1**	**76.3**	**57.6**
	Semester 2	**59.1**	**73.2**	

* 2004/5 results from term 1 (not semester 1)

Opiskelijat näkivät myös enemmän vaivaa matematiikan opintojensa eteen sekä heidän asenteensa oli myönteisempi toteutettujen muutosten jälkeen. Opiskelijoilta kerätty palaute toiminnasta oli myönteistä. Muutosten avulla opiskelijoille pystyttiin luomaan onnistumisen tuntemuksia matematiikan opiskeluun, mikä taas lisäsi heidän myönteistä asennettaan matematiikkaa kohtaan. Tätä kautta opiskelijat olivat halukkaita yrittämään enemmän tarvittavan käsitteen tai metodin oppimiseksi. Toteutetut muutokset vaikuttivat oppimiseen keskeisesti vaikuttavan kokonaisuuden, onnistumisen kehän (*Kuva 4*) muodostumisessa. (Parson, 2005)



Kuva 4: *Onnistumisen kehä (Parson, 2005)*

3.7.2 Mathematics Learning Support Centre

Matematiikka levittäytyy jokaiselle insinööritieteen alalle ja tämän takia on tärkeää, että insinööriopintoja suorittava opiskelija ymmärtää matemaattisia käsitteitä ja oppii soveltamaan niitä onnistuneesti insinööriopintojensa ongelmanratkaisutehtäviin. Loughboroughin yliopisto perusti vuonna 2002 matematiikan opetuksen yksikön, Mathematics Education Centren, jonka tarkoituksena on tarkkailla sekä kehittää matematiikan opetusta insinööritieteissä. Keskuksen osana toimii matematiikan oppimista tukeva keskus, Mathematics Learning Support Centre, joka tarjoaa erilaisia palveluita kaikille niille opiskelijoille, jotka tarvitsevat apua matematiikan tai tilastotieteen opinnoissaan. (Harrison, 2008)

Monissa yliopistoissa ja korkeakouluissa insinöörimatematiikan kurssit alkavat liian korkealta tasolta peilattuna opiskelijoiden todelliseen osaamiseen. Tämän seurauksena tarve matematiikan opintojen tukemiseen on lisääntynyt. Tutkimukset osoittavat lisäksi, että opiskelijoilla voi olla myös liian positiivinen käsitys omista taidoistaan. Tällöin he arvioivat omaa matemaattista osaamistaan paremmaksi kuin se todellisuudessa onkaan ja ovat enimmäkseen tietämättömiä niistä kaikista vaikeuksista, joita he saattavat kohdata insinööriopintojensa aikana matemaattisessa asiasisällössä. (Harrison, 2008)

Loughboroughin yliopistossa matematiikan tukitoimet ovat jokaisen opiskelijan käytettävissä, mutta kuitenkin pääsääntöisesti ne ovat tarkoitettu opintojensa alussa oleville opiskelijoille. Jokaisen lukuvuoden alussa uusille opiskelijoille suoritetaan alkutesti, jonka avulla saadaan parempi kokonaiskuva opiskelijoiden matemaattisista taidoista. Testi suoritetaan tietokoneavusteisesti, jolloin opiskelijat saavat välittömästi kokeen päätyttyä pistemääränsä sekä palautetta suorituksestaan. Alkutestin tulosten avulla saadaan tietoa niistä aihealueista, jotka tuottavat opiskelijoille vaikeuksia sekä pystytään antamaan heikosti menestyneille opiskelijoille tietoa, miten ja mistä heidän on mahdollista saada ylimääräistä tukea matematiikan opiskeluun. Yliopisto tarjoaa huomattavan määrän matematiikan tukipalveluita, jotka seuraavassa esitellään yksityiskohtaisemmin (Harrison, 2008):

Päivystysajat henkilökohtaiselle tuelle

Opiskelijat voivat hankkia apua matematiikan opiskeluunsa käymällä henkilökohtaisessa opetuksessa niille varattujen tuntien puitteissa. Näitä päivystystunteja pitävät matematiikan luennoitsijat, ja opiskelijoiden on mahdollista pyytää apua heiltä esimerkiksi vanhoihin tenttikysymyksiin, luentomuistiinpanojen ja koulumatematiikkaa kertaavien materiaalien sisältöön.

Työpajat

Vaikka päivystyksen tarjoama tuki jatkuu myös tenttiviikoilla, opiskelijoille tarjotaan mahdollisuutta osallistua myös kokeeseen kertaaviin työpajoihin. Kertaustunteja järjestetään sekä loppukokeiden lähestyessä että uusintatenttejä ennen.

Tilastotieteen tukeminen

Jatko-opiskelijoille ja viimeisen vuoden opiskelijoille tarjotaan tukea tilastotieteessä sekä järjestetään lyhyitä kursseja tilastotieteen aiheista avuksi lopputyön tekemiseen.

Henkilökohtaiset tapaamiset

Opiskelijat voivat sopia tapaamisia tutoreiden kanssa heidän yhdessä sopimana ajankohtana.

Erityistarpeinen tuki

Erityistä tukea ja asiantuntevaa apua tarjotaan erityistarpeisille opiskelijoille. Erityisesti dyslexia ja näkörajoitteisten opiskelijoiden auttamisesta Loughboroughin yliopistolla on huomattavaa kokemusta. Tarkoituksena on kasvattaa erityistarpeisten opiskelijoiden luottamusta heidän matemaattisia taitojaan kohtaan ja tätä kautta tukea heidän insinööriopintojaan.

Työhuoneet

Opiskelijat saavat käyttää tutkimuskeskusta paikkana, jossa he voivat työskennellä sekä paperi- että verkkopohjaisten tehtävien parissa avun ollessa lähellä silloin, kun he sitä tarvitsevat. Vaihtoehtoisesti opiskelijat voivat hyödyntää pienempiä työhuoneita ryhmätyöskentelyyn, joka on monelle opiskelijalle tehokas keino matemaattisten käsitteiden ja metodien oppimiseen.

Paperipohjaiset tukimateriaalit

Laajan oppikirjakokoelman lisäksi opiskelijoille tarjotaan kattavaa paperipohjaista tukimateriaalia. Nämä sisältävät opiskelutaitoja käsitteleviä lehtisiä sekä monen tasoisia matemaattista tietoa ja kaavoja käsitteleviä sivuja. Itseopiskeluun tarkoitetut muistiinpanot opastavat opiskelijaa aina koulumatematiikasta yliopiston ensimmäisen vuoden matematiikan sisältöihin. Materiaalit sisältävät paljon ratkaistuja esimerkkitehtäviä sekä opiskelijalle tarkoitettuja harjoitustehtäviä.

Tietokonepohjaiset tukimateriaalit

Monet tukimateriaalit ovat saatavilla myös verkossa, ja niiden käyttö on lisääntynyt opiskelijoiden keskuudessa. Verkkoon on lisätty myös verkkomateriaalin toimintoja esittelevä video rohkaisemaan ja kannustamaan opiskelijoita materiaalien käyttämiseen. Verkossa olevat tukimateriaalit pitävät sisällään teoriaosuuksia, ratkaistuja esimerkkitehtäviä, laskutehtäviä, videoita sekä testejä, joiden avulla opiskelija voi halutessaan määrittää osaamisensa tasoa.

4 TUTKIMUKSEN MATEMAATTINEN TAUSTATEORIA

4.1 Todennäköisyyslaskentaa

Todennäköisyyslaskennan tavoitteena on kehittää satunnaisluontoisten ilmiöiden analysoimiseen ja kuvaamiseen soveltuvia matemaattisia malleja. Tällöin päämääränä on luoda malli, jolla voitaisiin mahdollisimman totuudenmukaisesti ennustaa tiettyyn satunnaisilmiöön liittyvän kokeen tuloksia (Perttula;Vattulainen;& Suurhasko, 2009). Tämän osion teoria perustuu lähteisiin (Laininen, 1998), (Perttula;Vattulainen;& Suurhasko, 2009) ja (Metsämuuronen, 2003).

Otosavaruus ja alkeistapaus

Satunnaiskoe on reaalimaailman ilmiö, jolla on useita mahdollisia erilaisia tuloksia, ja kyseisen tuloksen määrää kullakin kokeen suorituskerralla sama satunnainen mekanismi. Kokeen mahdollista yksittäistä koetulosta sanotaan *alkeistapaukseksi* a_i ja kokeen kaikkien mahdollisten erilaisten alkeistapausten joukkoa kutsutaan *otosavaruudeksi* Ω.

Tapahtuma

Otosavaruuden osajoukko $A \subset \Omega$ on *tapahtuma*. Satunnaiskokeen yhteydessä tarkastellaan tavallisesti sellaisia tapahtumia, joihin useampi alkeistapaus voi johtaa. Tällöin sanotaan, että kokeessa realisoituu tapahtuma A, jos koetulos on A:n alkio. Esimerkiksi nopanheitossa tapahtuma A = ”parillinen silmäluku” toteutuu kolmessa eri alkeistapauksessa (silmäluku on 2, 4 tai 6). Joukko-opillisesti tapahtuman esitysmuoto on $A = \{2,4,6\}$.

Klassinen todennäköisyys

Olkoon kokeen otosavaruudessa äärellinen määrä N alkeistapauksia, eli $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_N\}$, jotka ovat kaikki yhtä mahdollisia. Tällöin tapahtuman $A \subset \Omega$ *klassinen todennäköisyys* on

$$P(A) = \frac{card\,(A)}{N}\,,$$ missä $card\,(A)$ merkitsee A:n alkioiden lukumäärää.

Todennäköisyysmitta

Todennäköisyysmitta P on otosavaruuden Ω osajoukkojen muodostamassa joukossa F määritelty reaaliarvoinen joukkofunktio $P : F \to \Omega$, joka toteuttaa seuraavat **Kolmogorovin aksioomat**:

Aksiooma 1. $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in F$

Aksiooma 2. Jos $A_1, A_2, \ldots \in F$ on jono pareittain erillisiä tapahtumia, eli $A_i \cap A_j = \phi$ jos $i \neq j$, niin tällöin

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Aksiooma 3. $P(\Omega) = 1$ ja $P(\phi) = 0$

Todennäköisyyden ominaisuuksia

Olkoon P otosavaruuden Ω todennäköisyysmitta. Tällöin voidaan aksioomiin nojautuen johtaa todennäköisyyksille eräitä laskusääntöjä.

Lause 1 Jos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on kokoelma pareittain erillisiä tapahtumia, niin

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Lause 2 $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, missä $\overline{A}$ tapahtuman A vastatapahtuma.

Lause 3 Mielivaltaisille tapahtumille A ja B pätee

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ehdollinen todennäköisyys

Olkoot A ja B kaksi tapahtumaa, joista tapahtuman B tiedetään tapahtuneen. Lisäksi tiedetään, että $P(B) > 0$. Tällöin määritellään tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla B seuraavasti

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä seuraa

Lause 4 **Kertolaskusääntö**. jos $P(B) > 0$, niin

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

Tapahtumien riippumattomuus

Olkoot A ja B kaksi samaan satunnaiskokeeseen liittyvää tapahtumaa. Jos tieto B:n tapahtumasta ei vaikuta lainkaan A:n todennäköisyyteen, ovat tapahtumat A ja B toisistaan riippumattomia. Matemaattisesti määritellään, että saman otosavaruuden tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Satunnaismuuttuja

Satunnaiskoetta kuvaillaan todennäköisyyskentällä, jonka otosavaruus voi olla hyvinkin abstrakti joukko. Satunnaiskokeen tulos voidaan usein muuntaa reaaliluvuksi jollakin funktiolla, jos tulos ei ole valmiiksi reaaliluku. Tällöin funktio suorittaa kuvauksen otosavaruudesta reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$. Tämä kuvaus on satunnaismuuttuja. Satunnaismuuttujaan liittyvät todennäköisyydet voidaan käsitellä analyyttisesti $\mathbb{R}$:llä määritellyn kertymäfunktion avulla.

Olkoon satunnaiskokeen otosavaruus Ω, tapahtumasysteemi E_σ ja todennäköisyys P. Satunnaismuuttuja X on funktio, joka liittää reaaliluvun $X(a_i)$ jokaiseen alkioon $a_i \in \Omega$. Satunnaismuuttujan X kaikki mahdolliset arvot muodostavat joukon

$$\Omega_X = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid X(a_i) = x,\ a_i \in \Omega \right\}$$

4.1.1 Diskreetin satunnaismuuttujan jakauma

Satunnaismuuttuja X on diskreetti, jos se voi saada vain erillisiä arvoja. Diskreetin satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma tunnetaan, kun vain tiedetään, millä todennäköisyydellä X saa eri arvot $X(a_i)$. Täten satunnaismuuttujalle voidaan määritellä tiheysfunktio seuraavasti:

Funktio $f:\ \mathbb{R} \to [0,1]$ on diskreetin satunnaismuuttujan X **tiheysfunktio**, jos

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x \in \Omega_X} f(x) = 1$
3. $f(x) = P(X = x)$

Kyseisiä arvoja $f(x) = P(X = x)$, missä $x \in \Omega_X$, kutsutaan pistetodennäköisyyksiksi. Tällöin mielivaltaisen tapahtuman $A \subset \Omega$ todennäköisyys $P(A)$ saadaan summaamalla yhteen A :n alkioiden pistetodennäköisyydet,

$$P(A) = \sum_{x \in \Omega_A} f(x)$$

Diskreetin satunnaismuuttujan X **kertymäfunktio** F määritellään kaikilla reaaliluvuilla x seuraavasti:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Satunnaismuuttujaa ja sen jakaumaa kuvaillaan usein erilaisilla tunnusluvuilla, joista tärkeimpiä ovat jakauman keskikohdan ilmoittava odotusarvo ja satunnaismuuttujan arvojen vaihtelun, hajonnan, laajuutta mittaavat varianssi ja keskihajonta.

Satunnaismuuttujan X **odotusarvo** määritellään

$$E[X] = \sum_{x_i \in \Omega_X} x_i \, P(X = x_i)$$

Odotusarvon $E[X]$ määritelmä vastaa X :stä tehtyjen havaintojen aritmeettista keskiarvoa. Odotusarvolla on myös fysikaalinen vastine. Jos jakauma ajatellaan x-akselille levitetyksi massaksi, on odotusarvo kyseisen massan painopisteen x-koordinaatti.

Varianssi mittaa X :n arvojen vaihtelun laajuutta odotusarvon ympärillä. Merkitään lyhyesti $E[X] = \mu$. Silloin varianssi lasketaan

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = \sum_{x_i \in \Omega_X} (x_i - \mu)^2 \, P(X = x_i)$$

Varianssin positiivinen neliöjuuri, **keskihajonta**, on samaa laatua oleva suure kuin X. Se mittaa kuinka paljon X:n arvot keskimäärin poikkeavat odotusarvosta. Usein merkitään $Var[X]=\sigma^2$, jolloin keskihajonta on σ.

Tilastollinen merkitsevyys
Kokeellisessa tutkimuksessa tehdään päättelyä satunnaismuuttujien havaituista arvoista. Tarkastellaan esimerkiksi tilannetta, jossa valmistetaan erästä tuotetta. Otaksutaan, että tuotantoprosessissa viallisten tuotteiden keskimääräinen osuus ei ylitä kuutta prosenttia. Siis todennäköisyys vialliselle tuotteelle on korkeintaan $p=$ 0,06. Tällöin voidaan olettaa, että 200 tuotteen joukossa on keskimäärin 200 $p=$ 12 viallista. Tämän arvon läheisyydestä havaittu viallisten tuotteiden lukumäärä X on normaalin satunnaisvaihtelun puitteissa luonnollista. Mutta jos viallisten lukumäärä X ylittää odotusarvon 12 huomattavasti, esimerkiksi löytyy 20 viallista, voi olla, että prosessissa on tapahtunut sellaista, joka on kasvattanut viallisten todennäköisyyttä.

Poikkeuksellisen suuren viallisten lukumäärän (20), tilastollinen merkitsevyys arvioidaan todennäköisyytenä

$$P(X \geq 20 | p = 0{,}06) = \sum_{k=20}^{200} \binom{200}{k} 0{,}06^k \, 0{,}94^{200-k} = 0{,}018$$

Tätä todennäköisyyttä kutsutaan nimellä **p-arvo**. Kyseisen esimerkin p-arvo on siis 0,018. P-arvo kertoo, kuinka suuri mahdollisuus sattumalla on aiheuttaa vähintään havaitun suuruinen poikkeama. Havaittu poikkeama tulkitaan johtuvaksi sattumasta, jos sattuman todennäköisyys p-arvolla mitattuna on yli 0,05. Tätä arvoa käytetään yleisesti tilastollista merkitsevyyttä laskettaessa. Joten esimerkin viallisten tuotteiden lukumäärä 20 on siis tilastollisesti merkitsevä poikkeama, jos vertailukohteena on prosessi, jossa viallisen todennäköisyys on 0,06.

4.1.2 Jatkuvan satunnaismuuttujan jakauma

Jatkuvan satunnaismuuttujan X arvojoukko Ω_X on jatkuva $\mathbb{R}$:n osaväli, välien yhdiste tai koko $\mathbb{R}$. Sen todennäköisyysjakaumaa mallinnetaan tavallisesti tiheysfunktiolla.

Funktio $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ on jatkuvan satunnaismuuttujan X **tiheysfunktio**, jos

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

Jatkuvan satunnaismuuttujan **kertymäfunktio** F määritellään seuraavasti

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Lause 5 Pisteissä x, joissa tiheysfunktio f on jatkuva, on kertymäfunktiolla derivaatta

$$F'(x) = f(x)$$

Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jolla on olemassa tiheysfunktio $f(x)$. Satunnaismuuttujan X eli sen jakauman **odotusarvo** määritellään

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Merkitään lyhyesti $E[X] = \mu$. Tällöin **varianssi** määritellään seuraavasti

$$Var[X] = \sigma^2 = E\left[(X - E[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx$$

Keskihajonta on varianssin positiivinen neliöjuuri σ eli $\sigma = \sqrt{Var[X]}$.

4.2 Tilastomatematiikan peruskäsitteitä

Tilastotieteen pyrkimyksenä on kehittää sellaisia menetelmiä, joiden avulla voidaan tehdä päätelmiä empiirisistä, kokemusperäisistä ilmiöistä. Systemaattiset, säännönmukaiset sekä satunnaiset tietyn ilmiön tekijät pyritään löytämään tilastollisten menetelmien avulla sekä arvioimaan ilmiöiden välisiä yhteyksiä ja lisäksi erottamaan ilmiöt toisistaan (Metsämuuronen, 2003). Tämän tutkimuksen taustalla vaikuttavia tilastotieteen käsitteitä esitellään seuraavaksi yksityiskohtaisemmin. Tilastomatematiikan osion lähdemateriaaleina ovat (Laininen, 1998), (Perttula;Vattulainen;& Suurhasko, 2009), (Metsämuuronen, 2003), (Ruohonen, 2009) ja (Pohjavirta & Ruohonen, 2005) ellei toisin mainita.

Perusjoukko

Perusjoukko on kaikkien niiden havaintoyksiköiden joukko, joista halutaan tietoa. Kokonaistutkimuksesta puhutaan silloin, kun tutkimukseen osallistuvat kaikki perusjoukon havaintoyksiköt. Tässä tutkimuksessa perusjoukkona on kurssien Insinöörimatematiikka 1 ja 2 opiskelijat.

Otanta

Koska tietoa ei ole mahdollista kerätä jokaiselta kyseisten kurssien opiskelijalta, on perusjoukkoa edustavat havaintoyksiköt valittava tutkimukseen. Havaintoyksikköinä olevat opiskelijat muodostavat otannan, jonka tulisi mahdollisimman hyvin edustaa koko perusjoukkoa (Uusitalo, 1997). Tutkimukseen osallistuvat henkilöt voidaan valita kahdella tavalla: satunnaisesti tai ei-satunnaisesti. Satunnaisotannassa valitaan täysin sattumanvaraisesti sopiva määrä yksiköitä mukaan tutkimukseen. Satunnaisotanta on yleisesti parempi, sillä se lisää tutkimuksen luotettavuutta. Ei-satunnaisotoksessa havaintoyksiköt valitaan tutkijan mielenkiinnon mukaan joko saatavuuden (helposti kokoon saatu joukko) tai harkinnan mukaan (halu tutkia oleellisia havaintoyksiköitä).

Tutkimukseni otantana ovat matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneet opiskelijat sekä vertailuryhmänä kahden luentoryhmän opiskelijat. Vertailuryhmän otanta pyrittiin toteuttamaan siten, että havaintoyksikköjen joukko olisi mahdollisimman iso (yli 100 yksilöä) ja heterogeeninen. Tutkimuksessa otanta tähtää tilastolliseen edustavuuteen. Haasteelliseksi asiassa tekee sen, että otos edustaa perusjoukkoa silloin, kun siinä on samoja ominaisuuksia samassa suhteessa kuin perusjoukossa. Koska kyseessä on ihmistiede, niin on mahdotonta kerätä otos, joka vastaisi pienoiskoossa perusjoukkoa, sillä jokainen perusjoukon yksilö on erilainen. Kuitenkaan otoksen pieni harhaisuus ei romuta tutkimusta, koska harhaisuuden vaikutuksia tuloksiin on mahdollista arvioida. (Uusitalo, 1997)

Muuttuja

Havaintoyksiköitä on mahdotonta sellaisenaan mitata, joten sen sijaan havaintoyksiköiden yksittäisiä piirteitä voidaan mitata. Muuttujiksi kutsutaan mitattavia piirteitä, joissa voi esiintyä vaihtelua (Uusitalo, 1997). Muuttujat muodostuvat osittain opiskelijoiden kyselyyn kirjoittamien vastausten perusteella. Helpoiten tämä onnistuu suljettujen kysymysten pohjalta, joissa vastaajan täytyy valita vastaus annetuista vaihtoehdoista. Tutkimukseni kyselyosio sisältää sekä suljettuja että avoimia kysymyksiä. Vaikka avointen kysymysten analysointi on huomattavasti hankalampaa, niin antavat ne kuitenkin laajemman ja monipuolisemman kokonaiskuvan opiskelijoiden matematiikan opintoihin vaikuttavista tekijöistä kuin pelkästään suljetut kysymykset.

Matemaattisesti otos voidaan ajatella jonona satunnaismuuttujia: $X_1, X_2, ..., X_n$. Konkreettisen otannan tuloksena saatu realisoitunut otos on puolestaan jono satunnaismuuttujien arvoja: $x_1, x_2, ..., x_n$.

4.2.1 Otossuureita

Frekvenssi ja suhteellinen frekvenssi

Tiettyä muuttujan arvoa vastaava *frekvenssi* f ilmoittaa, kuinka monta kertaa kyseinen arvo esiintyy tilastossa. *Suhteellinen frekvenssi* $f\%$ ilmoittaa taas, kuinka suuri osa kyseinen frekvenssi on kaikkien havaintojen lukumäärästä.

Mediaani

Mediaani on järjestetyn aineiston keskimmäisin arvo. Jos alkioiden lukumäärä on parillinen, mediaaniksi lasketaan usein kahden keskimmäisen luvun keskiarvo tai ilmoitetaan molemmat alkiot.

Otoskeskiarvo

Jokaiselle muuttujalle voidaan laskea otoskeskiarvo

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

missä x_i on kyseiseen muuttujaan liittyvä havainto.

Otosvarianssi

Otosvarianssi kuvaa tiettyyn muuttujaan liittyvien arvojen vaihtelua otoskeskiarvon ympärillä ja se määritellään seuraavasti

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \ ,$$

missä x_i on kyseiseen muuttujaan liittyvä havainto.

Otoskeskihajonta

Kun otosvarianssista otetaan neliöjuuri, saadaan otoskeskihajonta

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Kvantiilit ja kvartiilit

Tiettyä aineistoa käsiteltäessä voidaan informaatio tiivistää muutamaan lukuun, jotka kertovat kaiken oleellisen kyseisestä muuttujasta. Tällaisia ovat edellä esiteltyjen otossuureiden lisäksi *kvantiilit*. Sanomme, että luku q_α on ns. $\alpha - kvantiili$, jos

1. otosarvoista enintään 100α % on $< q_\alpha$ ja
2. otosarvoista enintään $100\ (1-\alpha)\%$ on $> q_\alpha$.

Yleensä sovitaan, että q_0 on pienin otosarvoista ja q_1 on suurin otosarvoista. Tämän lisäksi tietyillä kvantiileilla on seuraavat omat nimensä:

1. $q_{0,5}$ on *(otos)mediaani*.
2. q_0 on *otosminimi*.
3. q_1 on *otosmaksimi*.
4. q_0, $q_{0,25}$, $q_{0,5}$, $q_{0,75}$, q_1 ovat *(otos)kvartiilit*, $q_{0,25}$ on *alakvartiili* ja $q_{0,75}$ *yläkvartiili*.

4.3 Jakaumamalleja

Jakaumat ja jakaumaperheet voidaan luokitella diskreetteihin ja jatkuviin jakaumiin. Epäjatkuvat jakaumat liittyvät sellaisiin todellisiin elämän ilmiöihin, joissa muuttuja voi saada vain äärellisen määrän arvoja. Tilastotieteessä monilla jakaumilla on oleellinen merkitys saatujen tulosten tilastollisen merkitsevyyden testaamisessa ja siten tulosten luotettavuuden arvioinnissa. Jakaumaoletus on tärkeä siitä syystä, että mikäli voidaan sanoa tutkittavan ilmiön noudattavan jotain tiettyä jakaumaa, voidaan ilmiö muuntaa helposti matemaattiseen muotoon ja siten hallita sitä muutaman keskeisen luvun avulla.

Binomijakauma

Toistokokeessa toistetaan samaa koetta n kertaa ja tarkastellaan jokaisella toistolla tapahtuman A tai sen vastatapahtuman $\overline{A}$ toteutumista. Olkoon $P(A) = p$, jolloin $P(\overline{A}) = 1 - p$. Toistokokeen alkeistapauksen, jossa A realisoituu x kertaa ja $\overline{A}$ realisoituu $n - x$ kertaa, todennäköisyys on

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}.$$

Diskreetti satunnaismuuttuja X noudattaa **binomijakaumaa** parametrein (n, p), merkitään $X \sim$ Bin (n, p), jos X :n otosavaruus $\Omega_X = \{0,1,....,n\}$ ja tiheysfunktio

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad \text{kun } x=0,1,...,n$$

Normaalijakauma

Normaalijakaumaa voidaan pitää tärkeimpänä jakaumana todennäköisyyslaskennassa ja sen sovellutuksissa. Normaalijakauma esiintyy monien ilmiöiden yhteydessä luonnossa ja myös tekniikassa. Käyrä on muodoltaan symmetrinen keskiarvonsa suhteen, mistä seuraa monia erinomaisia ominaisuuksia. Satunnaismuuttuja X, jonka otosavaruus on koko reaalilukujen joukko, on **normaalijakautunut** parametrein (μ, σ^2), merkitään $N \sim (\mu, \sigma^2)$, jos X :n tiheysfunktio on

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \text{missä } -\infty<\mu<\infty,\ \sigma>0$$

Normaalisti jakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo ja varianssi ovat

$$E[X]=\mu$$
$$Var[X]=\sigma^2$$

χ^2 - jakauma

Riippumattomien $N \sim (0,1)$ jakautuneiden satunnaismuuttujien neliöiden summa χ^2 noudattaa khin neliön jakaumaa. Parametri n on yhteenlaskettavien neliöiden lukumäärä ja se on nimeltään *vapausaste.* Seuraava Lause 6 pitää sisällään joitakin χ^2 - jakauman ominaisuuksia

Lause 6

i. $X \sim \chi^2(n)$, niin X :n tiheysfunktio on

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & kun\ x > 0 \\ 0 & , kun\ x \le 0, \end{cases}$$

missä Γ on gammafunktio, jonka lauseke on muotoa

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt,\ x > 0$$

ii. Jos $X \sim \chi^2(n)$, niin $E[X]=n$

iii. Jos $X \sim \chi^2(n)$, niin $Var[X]=2n$

T-jakauma

Oletamme, että samassa kokeessa realisoituvat riippumattomat satunnaismuuttujat $u \sim N(0,1)$ ja $X \sim \chi^2(n)$. Tällöin satunnaismuuttujalla T on t-jakauma vapausastein n, jos sen jakauma on sama kuin satunnaismuuttujan

$$\frac{u}{\sqrt{X}}\sqrt{n},$$

merkitään $T \sim t(n)$. Usein jakaumaa kutsutaan myös nimellä Studentin jakauma. F-jakauman, jota ei käsitellä tässä työssä, avulla saadaan johdettua t-jakaumalle tiheysfunktio:

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{n}t^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

4.4 Tilastollinen testaus

Tilastollisesta testauksesta puhuttaessa tarkoitetaan havainnoista tapahtuvaa päätöksentekoa. Kokeellisen tutkimuksen keskeisiä menettelytapoja on asettaa hypoteeseja ja testata niiden sopivuus havainnoista.

Luottamusvälin muodostaminen
Luottamusvälin muodostamisessa pyritään selvittämään lukuarvoväli, jonka voidaan sanoa sisältävän tietyn parametrin θ arvon annetulla todennäköisyydellä. Havaintojen avulla määritetty väli, joka peittää parametrin tarkan arvon allensa todennäköisyydellä $1-\alpha$, on parametrin $100(1-\alpha)\%$:n luottamusväli. Ennen havaintojen hankintaa muodostettua todennäköisyyttä $1-\alpha$, johon laskelmat perustuvat, kutsutaan *luottamustasoksi*. Luottamusvälin muodostamisessa haetaan kaksi satunnaismuuttujan arvoa θ_L ja θ_U, joista edellinen toimii välin alapuolisena ja jälkimmäinen yläpuolisena luottamusrajana. On järkevää valita päätepisteet siten, että

$$P(\theta \leq \theta_L) = P(\theta \geq \theta_U) = \frac{\alpha}{2},$$

jolloin väli on todennäköisyyksiin nähden symmetrinen.

4.4.1 Hypoteesien testaaminen

Hypoteesilla tarkoitetaan jotain populaatiojakauman ominaisuutta, joka sillä on tai sitten ei ole. Tilastollinen hypoteesi muotoillaan usein siten, että se voidaan testata huolellisesti suunniteltujen kokeiden avulla. Hypoteesin testauksella pyritään selvittämään tiettyä otosta käyttäen, onko populaatiojakaumalla kyseistä ominaisuutta vai ei. Nollahypoteesilla H_0 tarkoitetaan yleisesti sellaista mielipidettä tai väittämää, josta ollaan valmiita luopumaan. Testi tehdään sillä oletuksella, että nollahypoteesi pitää paikkansa. Yleisesti nollahypoteesi siis väittää: ”Ei ole yhteyttä” tai ”Ei ole eroa”. Vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 on väite, jolle pyritään hakemaan tukea tietyn aineiston pohjalta. Jos aineiston perusteella on löytynyt riittävän vahva syy hylätä nollahypoteesi H_0, niin jatketaan olettaen vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 oikeaksi. Tällainen tilanne voi johtaa ominaisuuden jatkotutkimukseen.

Hypoteesin testauksen tulos voi olla virheellinen kahdella eri tavalla: hylätään H_0, vaikka se on oikea; ei hylätä H_0:a, vaikka se on väärä. Todennäköisyyttä α sanotaan *riskitasoksi*, joka ilmaisee, kuinka suuri riski otetaan H_0:n erheelliselle hylkäämiselle. Usein tämä riskitaso on $0{,}05$ eli $\alpha = 0{,}05$.

Usein hypoteesi koskee tiettyä populaation parametria θ tai kahden populaation vastinparametrien vertailua. Parametria koskevia perushypoteeseja on kolmea tyyppiä: kaksi toispuolista ja kaksipuolinen testaus. *Toispuoliset* hypoteesiparit ovat

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ , \ H_1 : \theta > \theta_0$$

sekä

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ , \ H_1 : \theta < \theta_0 \ ,$$

missä vertailuarvo θ_0 on annettu.

Pari $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta > \theta_0$ testataan riskitasolla α laskemalla realisoituneesta otoksesta alapuolinen $100(1-\alpha)\%$ luottamusraja θ_L parametrille θ. Nollahypoteesi hylätään, jos vertailuarvo θ_0 ei ole saadulla luottamusvälillä, eli mikäli $\theta_0 \leq \theta_L$.

Vastaavasti pari $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta < \theta_0$ testataan riskitasolla α laskemalla yläpuolinen $100(1-\alpha)\%$ luottamusraja θ_U parametrille θ. Nollahypoteesi hylätään, mikäli $\theta_0 \geq \theta_U$.

Kaksipuolisen testin hypoteesipari on

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ , \ H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Tällöin testaamiseksi riskitasolla α lasketaan ensin parametrille θ kaksipuolinen $100(1-\alpha)\%$ luottamusväli (θ_L, θ_U). Nollahypoteesi H_0 hylätään, jos vertailuarvo θ_0 ei ole kyseisellä välillä.

P-arvo

Havaitun p-arvon käyttöä voidaan lähestyä kolmesta, toisistaan hieman poikkeavasta näkökulmasta. Ensimmäinen näistä on se, että p-arvo tarkoittaa havainnon todennäköisyyttä omassa jakaumassaan. Toiseksi p-arvo kertoo nollahypoteesin hylkäämisen merkitsevyystason. Ja kolmanneksi p-arvo kertoo nollahypoteesin virheellisen hylkäämisen riskin, jolloin se ilmoittaa todennäköisyyden, jolla teemme virheellisen johtopäätöksen pitkässä sarjassa samanlaisten aineistojen analyyseja. Nämä kolme lähestymistapaa eivät ole ristiriidassa keskenään, vaan ne voitaneen sovittaa yhteen ainakin käytännön tilanteissa.

Yleisesti nollahypoteesi H_0 hylätään mikäli p-arvo $\leq \alpha$, missä α on ennalta sovittu riskitaso. P-arvo saadaan toispuolisen testauksen tapauksessa laskemalla realisoitunutta testisuuretta vastaava häntätodennäköisyys (olettaen H_0 oikeaksi). Kaksipuolisessa testauksessa p-arvo saadaan, kun realisoitunutta testisuuretta vastaavista kahdesta häntätodennäköisyydestä valitaan pienempi ja kerrotaan tulos kahdella.

T-testi

Yleisin tunnettu keskiarvojen eron testausmenetelmä on t-testi. Mikäli voidaan olettaa, että otos on peräisin normaalisti jakautuneesta populaatiosta ainakin kohtuullisella varmuudella ja mittaus on suoritettu vähintään välimatka-asteikollisella mittarilla, voidaan käyttää hyödyksi jakaumaoletusta. Välimatka-asteikolle tyypillistä on, että muuttujan arvojen väliset etäisyydet pystytään määrittämään, ja absoluuttista nollakohtaa ei välttämättä ole olemassa. T-testillä tarkoitetaan siis t-jakaumaa käyttävää testiä, jossa verrataan otoskeskiarvoa käyttäen jakauman odotusarvoa annettuun arvoon tai toisen jakauman odotusarvoon.

Tutkitaan seuraavaksi kahden odotusarvon vertailua. Oletetaan, että olemme keränneet riippumattomin koetoistoin satunnaismuuttujasta x otoksen $x_1,...,x_{n1}$ ja satunnaismuuttujasta y otoksen $y_1,...,y_{n2}$. Oletamme, että kumpikin muuttuja on tyydyttävästi mallinnettavissa normaalijakauman avulla ja voimme olettaa mallien varianssien olevan samat, eli $x \sim N(\mu_1,\sigma^2)$ ja $y \sim N(\mu_2,\sigma^2)$. Testattavana ovat seuraavat hypoteesit:

$$H_0:\mu_1=\mu_2 \quad , \qquad H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

Jos hypoteesi H_0 on voimassa, voitaisiin tulkita otosten olevan peräisin samasta ideaalisesta satunnaismuuttujasta $z \sim N(\mu\ ,\sigma^2)$.

Lause 7

$$T=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{n_1 s_1^2+n_2 s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

missä $\bar{x}$ on x:n otoskeskiarvo, $\bar{y}$ on y:n otoskeskiarvo, s_1^2 on x:n otosvarianssi sekä s_2^2 y:n otosvarianssi.

Lauseen tulosta hyödyntäen voidaan laskea testisuureen T arvo hypoteesin H_0 mukaisilla parametrin arvoilla $\mu_1-\mu_2=0$. Tällöin on mahdollista kaksi tulkintaa:

- Jos testisuure osuu kriittisen alueen ulkopuolelle (jakauman keskialueelle), päättelemme tällöin, että koetulokset eivät ole ristiriidassa sen mahdollisuuden kanssa, että $\mu_1 = \mu_2$. Tällöin testitulosten perusteella μ_1 ja μ_2 eivät eroa toisistaan sovitulla merkitsevyystasolla.

- Jos testisuure osuu kriittiselle alueelle, hylätään nollahypoteesi H_0. Tällöin hyväksytään vaihtoehtoinen hypoteesi H_1, eli $\mu_1 \neq \mu_2$, jolloin x ja y eivät ole mallinnettavissa samalla jakaumalla.

Edellä esitetyssä kahden keskiarvon erotuksen t-testissä on oletuksena, että molemmilla satunnaissuureilla on sama varianssi. Usein ei ole tietoa variansseista ja tällöin yhtäsuuruutta ei pystytä mitenkään takaamaan. Tällöin odotusarvojen erotusta koskevat hypoteesit voidaan testata Lauseen 7 suuretta T muistuttavalla testisuureella t_0. Olkoon $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, missä odotusarvot ja varianssit ovat tuntemattomia. Tällöin erotuksen $\mu_1 - \mu_2$ testaus suoritetaan testisuureella

$$t_0 = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \sim t\left(\frac{\left[s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2 \right]^2}{\dfrac{\left[s_1^2 / n_1 \right]^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left[s_2^2 / n_2 \right]^2}{n_2 - 1}} \right)$$

Mann-Whitneyn U-testi

Jakaumaoletus on oleellinen apuväline tilastollisessa testauksessa. Virheellisen jakaumaoletuksen seurauksena saadut tulokset voivat olla vääriä. Erityisesti, jos otoskoko on pieni, ongelma on monesti todellinen. Tällöin on suositeltavaa käyttää eiparametrisia menetelmiä, joissa ei oleteta taustalla olevan mitään erityistä jakaumaa. Eräs tällainen menetelmä on Mann-Whitneyn U-testi, joka soveltuu erityisesti pienille aineistoille.

U-testin ideana on verrata tietyn tutkittavan muuttujan mediaania kahdessa riippumattomassa otoksessa ja tutkia ovatko mediaanit samansuuruiset tietyllä valitulla merkitsevyystasolla. Merkitään kyseisiä populaatiomediaaneja $\tilde{\mu}_1$:lla ja $\tilde{\mu}_2$:lla. Nollahypoteesi on tällöin $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$. Testi reagoi herkästi nimenomaan populaatiomediaanien eroon, mutta paljon heikommin moniin muihin populaatiojakaumien eroihin.

Oletetaan, että ensimmäisen otoksen havainnot ovat $\{x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n1}\}$, jolloin havaintoja on n_1 kappaletta. Toisen otoksen havainnot ovat taas $\{x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n2}\}$, jossa havaintojen lukumäärä on n_2. Yhdistetään otokset yhteisotokseksi

$$x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n2}.$$

Kahden otoksen sisältämä aineisto laitetaan suuruusjärjestykseen ja annetaan niille vastaavat järjestysluvut.

$$r_{1,1}, r_{1,2}, \ldots, r_{1,n1}, r_{2,1}, r_{2,2}, \ldots, r_{2,n2}.$$

Jos yhteisotoksessa on samoja lukuja, jolloin niiden järjestysnumerot ovat peräkkäiset, annetaan niille kaikille järjestysnumeroksi alkuperäisten peräkkäisten järjestysnumeroiden keskiarvo.

Tämän jälkeen lasketaan yhteen ensimmäisen otoksen n_1 järjestyslukua, jonka perusteella saadaan luku $w_1 = r_{1,1} + \ldots + r_{1,n1}$. Vastaavasti laskien yhteen toisen otoksen n_2 järjestyslukua saadaan $w_2 = r_{2,1} + \ldots + r_{2,n2}$. Tällöin

$$w_1 + w_2 = \frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2},$$

joka on saatu aritmeettisen sarjan summana. Merkitään $w = min(w_1, w_2)$. Käyttämällä Mann-Whitney U-testin tilastollisia taulukoita voidaan laskea saatua arvoa w vastaava todennäköisyys. Testattaessa voivat esiintyä seuraavat tilanteet:

- Jos $\tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2$, pyrkii w_1 olemaan pieni ja w_2 iso. Tämä tilanne johtaa nollahypoteesin hylkäämiseen vaihtoehtoisen hypoteesin $H_1 : \tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2$ hyväksi.
- Jos $\tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu}_2$, pyrkii w_1 olemaan suuri ja w_2 pieni ja tällöin nollahypoteesi hylätään vaihtoehtoisen hypoteesin $H_1 : \tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu}_2$ hyväksi.
- Jos jompikumpi luvuista w_1 ja w_2 on pieni, jolloin w on pieni, se on merkki siitä, että $\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$ ja nollahypoteesi pitäisi hylätä vaihtoehtoisen hypoteesin $H_1 : \tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$ hyväksi.

Esimerkkinä tutkitaan tilannetta, jossa verrataan kahden ryhmän (naiset ja miehet) jäsenten ikiä ja halutaan tietää eroavatko naisten ja miesten iät (mediaanit) toisistaan. Henkilöiden iät ovat seuraavat:

Miehet (M)	19	22	16	29	24
Naiset (N)	20	11	17	12	

Muodostetaan saadun datan pohjalta seuraava taulukko:

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$x_{M,i}$	19	22	16	29	24
$r_{M,i}$	5	7	3	9	8
$x_{N,i}$	20	11	17	12	-
$r_{N,i}$	6	1	4	2	-

Nyt voidaan laskea $w_M = 5+7+3+9+8=32$ ja $w_N = 6+1+4+2=13$, jolloin $w = min\,(w_M, w_N) = 13$. Käyttämällä Mann-Whitney U-testin taulukkoja saadaan kaksisuuntaisesti testattuna p-arvoksi $p = 0{,}11$. Tämän perusteella voidaan tehdä päätelmä, että aineiston perusteella ei voida väittää, että ryhmien iät (mediaanit) eroavaisivat toisistaan. Koska otoksen koko on pieni, niin saatu tulos tulee käsitellä suuntaa-antavana. (Shier, 2007)

Jos havaintojen määrä on riittävän suuri ($n_1 n_2 > 20$), voidaan usein käyttää normaaliapproksimaatiota, jolloin

$$\mu_U = \frac{n_1\left(n_1+n_2+1\right)}{2}, \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (N+1)}{12}}, \text{ missä } N = n_1 + n_2.$$

5 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tutkimuksen kohdejoukkona olivat TTY:n opiskelijat, jotka osallistuivat matematiikkaklinikan pienryhmätoimintaan, jonka tarkoituksena oli tarjota matematiikan opinnoissa tukea tarvitseville opiskelijoille sekä vertaisoppijoille oppimista edistäviä opetuksellisia rakenteita. Kyseisten henkilöiden matematiikan opintoihin vaikuttavia tekijöitä ja opintomenestystä pyrittiin kartoittamaan hankitun aineiston perusteella. Tutkimuksessa käytetyn aineiston kerääminen tapahtui kyselylomakkeen avulla sekä tenttitulosten, perustaitojen testin että matematiikkaklinikalla tapahtuneen havainnoinnin perusteella. Tämän jälkeen aineisto käsiteltiin ja analysoitiin. Havaintoyksiköiden valinnan ja muuttujien määrittelyn ja mittaamisen jälkeen tilastollinen aineisto koottiin havaintomatriiseihin. Näin saatua aineistoa on helpompi tutkia ja suorittaa vertailuja. Muuttujien arvoissa olevan informaation pelkistämistä toteutettiin muutaman muuttujaa kuvaavan tunnusluvun avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että tunnuslukuja käytettäessä osa informaatiosta katoaa, mutta hyötynä on se, että aineiston tieto saadaan tiiviiseen muotoon (Heikkilä, 2002). Tunnuslukujen avulla on helpompi vertailla esimerkiksi matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneita opiskelijoita muihin samaa kurssia suorittaviin henkilöihin ja tutkia, löytyykö heidän välillään joitakin tilastollisesti merkitseviä eroja puhuttaessa jostakin tietystä muuttujasta.

5.1 Perustaitojen testi

Tampereen teknillisen yliopiston uusille opiskelijoille on suunniteltu matematiikan opintojen alkaessa suoritettava perustaitojen testi. Perustaitojen testi kuuluu osaksi matematiikan opistojen ensimmäistä kurssia, ja sen tarkoituksena on antaa tietoa opiskelijoiden matemaattisesta osaamisesta sekä kartoittaa niitä matematiikan aihealueita, jotka tuottavat vaikeuksia opiskelijoille.

Perustaitojen testi suoritetaan tietokoneavusteisesti, ja se on kestoltaan yhden tunnin mittainen. Testi sisältää 16 lukiomatematiikan perustehtävää, joiden ratkaisemiseen opiskelija ei saa käyttää kirjallisuutta eikä laskinta. Jos opiskelijan koulumatematiikan taidot ovat selkeästi puutteelliset, eli hän ei läpäise perustaitojen testiä, tulee hänen suorittaa matematiikkajumppa. Jumppa suoritetaan myös tietokoneavusteisesti, ja se käsittää 81 tehtävää kymmeneltä lukion pitkän matematiikan keskeiseltä osa-alueelta.

Perustaitojen testin alussa opiskelijalle esitetään profilointikysymys, joka kartoittaa opiskelijoiden matematiikan oppimistapoja. Opiskelijan tulee valita annetuista viidestä profiilista se, joka parhaiten kuvaa häntä matematiikan opiskelijana. Profiilien kuvaukset pohjautuvat Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksen aikaisempaan tutkimukseen, joka käsittelee opiskelijoiden toimintaan vaikuttavia tekijöitä, joita ovat muun muassa asenteet, orientaatiot, intentiot ja motivaatiot (Huikkola;Silius;& Pohjolainen, 2008). Profilointivaihtoehdot sekä profilointijakauma (*Kuva 5*) syksyn 2009 perustaitojen testiin osallistuneista opiskelijoista näyttää seuraavalta:

1. profiili: Pintasuuntautuneet mallista oppijat

Kiinnostukseeni matematiikkaa kohtaan vaikuttaa enemmän koulutusohjelma kuin oma mielenkiinto. Lasken tehtävän usein samalla tavalla kuin se on esitetty kirjassa tai tunnilla, enkä yleensä mieti omaa menetelmää tehtävän ratkaisemiseksi. Kykenen oppimaan matematiikkaa kopioimalla esimerkkiratkaisuja kunhan pidän ajatuksen mukana.

2. profiili: Vertaisoppijat

Opiskelen mielelläni matematiikkaa yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa ja laskiessani toivon, että saan neuvoa, jos en kykene itsenäisesti tehtävää ratkaisemaan. Kiinnitän huomiota esimerkkeihin ja koen, että matematiikan oppiminen on tarpeellista. Tehtäviä laskettaessa on mielestäni tärkeää saada oikea vastaus, vaikka joissakin kohdissa ratkaisua olisi virheitä. Pidän siitä, että yrittämisestä palkitaan.

3. profiili: Tukea tarvitsevat

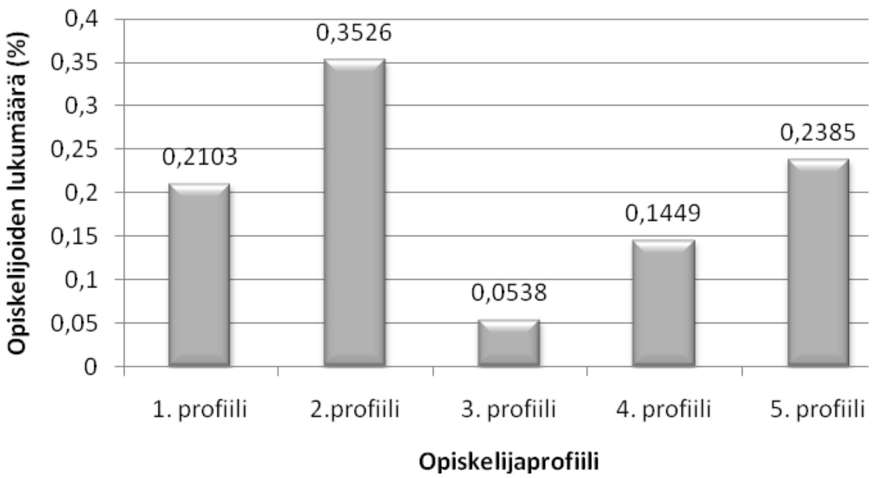
Opiskellessani matematiikkaa haluan, että minua opastetaan henkilökohtaisesti vaikeissa kohdissa. Opettajan antamat esimerkit ja opetustapa vaikuttavat paljon siihen, miten omaksun asian. En mielelläni sovella malliratkaisuja uusiin tehtäviin. Jätän vaikeat tehtävät tekemättä tai kesken. Matematiikan “kieli” vaikuttaa minusta vaikealta.

4. profiili: Omin päin opiskelevat

Pystyn oppimaan matematiikkaa, jos koen tarvitsevani sitä. En laske tehtäviä mielelläni kavereiden kanssa, vaan opin parhaiten itsekseni pohtimalla. En myöskään tarvitse opettajan tukea oppimisessani. Laskutehtävien kopioiminen ei edistä oppimistani.

5. profiili: Osaajat

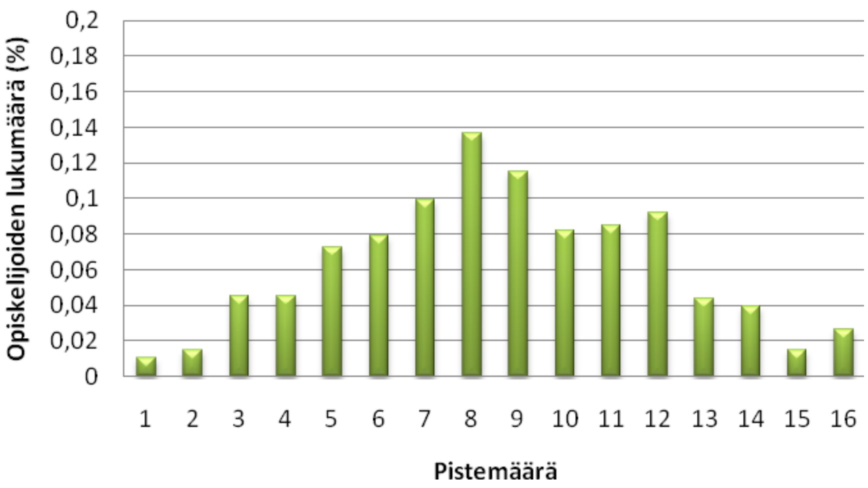
Haluan oppia matematiikkaa syvällisesti, enkä halua opetella asioita ulkoa. Laskiessani vaikeaa tehtävää en luovuta helpolla, vaan yritän ratkaista sen. Pärjään mielestäni hyvin matematiikassa.



Kuva 5: *Opiskelijaprofiilijakauma*

Huomioitavaa opiskelijaprofiilijakauman tuloksissa on, että suurin profilointiryhmä on vertaisoppijat. Tämän takia on tärkeää pohtia ja kehittää sellaisia käytänteitä, jotka tukisivat ja helpottaisivat kyseisten opiskelijoiden ryhmäytymistä ja tätä kautta edistäisivät matematiikan opintojen mielekkyyttä ja sujuvuutta. Tukea tarvitseviksi opiskelijoiksi oli profiloinut itsensä vain noin 5 prosenttia opiskelijoista. Tämän saattaa osaltaan selittää opiskelijoiden vääristynyt käsitys omasta matemaattisesta osaamisestaan. Perustaitojen testi suoritetaan heti opintojen alkaessa, joten opiskelijoilla ei ole selkeää kuvaa omasta osaamisensa tasosta suhteutettuna vaadittuun tasoon yliopistomatematiikassa.

Syksyllä 2009 perustaitojen testiin osallistui yhteensä 780 opiskelijaa ja läpipääsyrajaksi tuli 6 pistettä. Tällöin testin läpäisi 80,4 % osallistuneista. Poistettaessa opiskelijajoukosta matematiikkaklinikan sekä teknis-luonnontieteellisen koulutusohjelman opiskelijat testituloksen keskiarvoksi muodostui 8,63 keskihajonnan ollessa 3,34. Alla oleva *Kuva 6* esittää perustaitojen testin pistemääräjakauman syksyn 2009 testille siten, että joukossa ei ole matematiikkaklinikkalaisia eikä teknis-luonnontieteellisen koulutusohjelman opiskelijoita. Vertailuryhmä haluttiin muodostaa opiskelijoista, jotka suorittivat samoja Insinöörimatematiikan kursseja kuin matematiikkaklinikkalaisetkin. Tämän takia laajoja matematiikan kursseja suorittavia teknis-luonnontieteellisen koulutusohjelman opiskelijoita ei sisällytetty vertailuryhmään. Matematiikkaklinikan opiskelijoiden pistemääräjakauma syksyn 2009 perustaitojen testissä on esitetty *Kuvassa 9*.

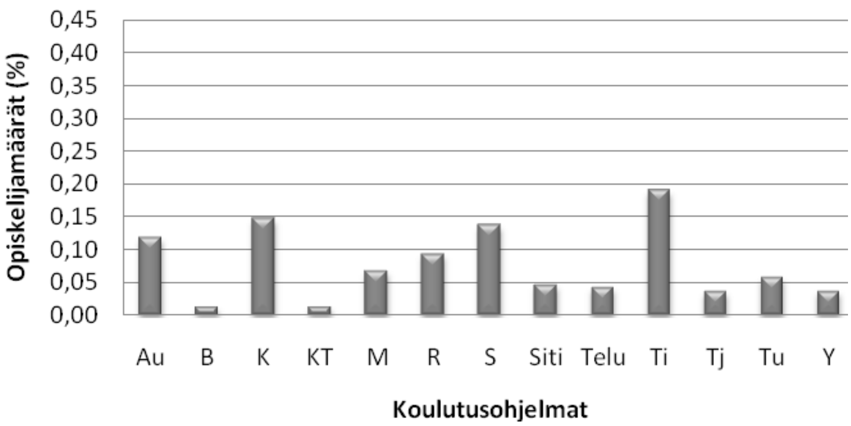


***Kuva 6:** Perustaitojen testin pistemääräjakauma syksyllä 2009*

5.2 Koulutusohjelmat

Syksyllä 2009 paikalla oleviksi opiskelijoiksi ilmoittautui yhteensä 7488 opiskelijaa. Prosentuaaliset opiskelijamäärät koulutusohjelmittain on esitetty *Kuvassa 7*, jossa käytetyt lyhenteet ovat seuraavat:

Automaatiotekniikka	Au
Biotekniikka	B
Konetekniikka	K
Kuitu- ja tekstiilitekniikka	KT
Materiaalitekniikka	M
Rakennustekniikka	R
Sähkötekniikka	S
Signaalinkäsittely ja tietoliikennetekniikka	Siti
Teknisluonnontieteellinen	Telu
Tietotekniikka	Ti
Tietojohtaminen	Tj
Tuotantotalous	Tu
Ympäristö- ja energiatekniikka	Y



Kuva 7: *Opiskelijamäärät koulutusohjelmittain*

5.3 Matematiikkaklinikka

Matematiikan tukiopetuskokeilu, matematiikkaklinikka, kehitettiin matematiikan opiskeluissa tukea tarvitsevien opiskelijoiden ohjaamiseen ja opettamiseen. Ensimmäiset tukiopetusryhmät muodostettiin syyskuun 2009 aikana. Tukitoimintaa käytiin esittelemässä jokaisessa kurssin Insinöörimatematiikka 1 luentoryhmässä. Tämän lisäksi asiasta tiedotettiin Tampereen teknillisen yliopiston opiskelijoille tarkoitetun TTY-Piiri –verkkopalvelun (TTY-Piiri, 2010) kautta sekä lähetettiin sähköpostia kaikille niille opiskelijoille, jotka olivat ilmoittautuneet kurssille Insinöörimatematiikka 2. Tukitoiminnasta kiinnostuneet opiskelijat jaettiin pieniin, luentoryhmäkohtaisiin ryhmiin, joissa kussakin oli 5-10 matematiikan opiskelussa tukea tarvitsevaa opiskelijaa. Tukiopetusryhmissä olevat henkilöt olivat kursseja Insinöörimatematiikka 1 ja 2 suorittavia opiskelijoita. Jokainen ryhmä kokoontui kerran viikossa kahdeksi tunniksi kerrallaan. Tukiopetus keskittyi lukiomatematiikan kertaukseen sekä yliopistomatematiikan tukemiseen. Pääpaino tukiopetuksen sisällössä kohdistui kuitenkin Insinöörimatematiikan kurssien laskuharjoitustehtäviin, joita opiskelijat yrittivät ratkaista tukiopetusta pitävän henkilön avustuksella.

Matematiikkaklinikan alkaessa toimintaan osallistui 12 opiskelijaa. Opiskelijat jaettiin pieniin ryhmiin siten, että jokaisessa ryhmässä oli 3-5 henkilöä. Toisen periodin aikana matematiikkaklinikan pienryhmiin osallistuvien lukumäärä kasvoi lähes 50 opiskelijaan, jolloin ryhmiä muodostettiin lisää, mutta samalla ryhmäkokoja jouduttiin kasvattamaan. Tämän tutkimuksen kohdejoukko koostuu matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneista opiskelijoista sekä vertailuryhmän muodostavat opiskelijat, jotka suorittivat kursseja Insinöörimatematiikka 1 ja 2 syksyllä 2009. Matematiikkaklinikan toiminnan aikataulu syksyllä 2009 on esitelty yksityiskohtaisesti Liitteessä G.

5.3.1 Ohjauksen keskeinen sisältö

Tukiopetuksen keskeisenä päämääränä oli luoda avoin ja keskusteleva ilmapiiri pienryhmätunneille. Avaintekijöinä tällaisen ilmapiirin luomiseen olivat ohjaajan iloinen ja ystävällinen tyyli opiskelijoita kohdatessa, jolloin korostui myös tasavertaisuuden painottaminen. Tällöin jokaiseen opiskelijaan suhtauduttiin samalla tavalla riippumatta hänen matemaattisista taidoistaan. Suhtautuminen opiskelijoihin tasavertaisesti on opetuksen ja ohjauksen keskeisiä tekijöitä. Pienryhmissä opiskelijoita ei arvotettu matemaattisen osaamisensa perusteella eikä myöskään ohjaaja korostanut omaa matemaattista osaamistaan tavalla, joka heikentää opiskelijoiden itseluottamusta omiin matemaattisiin kykyihinsä. Opiskelijoita rohkaistiin ja kehotettiin kysymään heitä mietityttäviä seikkoja myös koko ryhmän kuullen, ja ohjauksessa korostettiin erityisesti, että opiskelijoiden ei tarvinnut pelätä epäonnistumisia. Monesti on hyvin suotavaa, että esiin nousee virheellisiä käsityksiä, jolloin aihetta voidaan käsitellä yhdessä ja samalla korjata mahdollisesti muidenkin opiskelijoiden virheellisiä käsityksiä kyseisestä aiheesta. Olennaista on korostaa juuri virheellisten käsitysten näkökulmaa opiskelijoille, koska tätä kautta on mahdollista tukea opiskelijoiden oppimista sekä lisätä ohjaajan ja opiskelijoiden välistä luottamusta ja siten osaltaan parantaa opiskelijoiden uskoa omiin kykyihinsä.

Pienryhmäopiskelun keskeinen ajatus oli opiskelijoiden henkilökohtainen ohjaus. Tällöin opetuksessa korostui vahvasti kärsivällisyys, jolloin ohjaaja neuvoi ja selvensi opiskelijoille henkilökohtaisesti samoja asioita tarvittaessa useampaankin kertaan. Matemaattisen aihesisällön käsittely tapahtui usein siten, että teoriaa selitettiin uudelleen lähtien liikkeelle perusasioista. Joitakin käsitteitä tai ominaisuuksia lähestyttiin lukiomatematiikan avulla, jonka jälkeen aihetta laajennettiin kyseistä tilannetta vastaavaksi. Yksinkertaisten tilannetta selventävien havaintoesimerkkien käyttäminen oli myös keskeisessä asemassa laskuharjoitustehtäviä ratkaistaessa. Pienryhmätuntien eteneminen vaihteli itsenäisestä laskemisesta ryhmän kanssa yhdessä ratkaistaviin tehtäviin. Pohdittaessa yhdessä tehtäviä opiskelijat kysyivät vapautuneesti heitä mietityttäviä seikkoja. Henkilökohtaisessa kuin myös koko ryhmän ohjauksessa korostui matemaattisten käsitteiden selittäminen matemaattisen kielen lisäksi myös opiskelijaystävällisemmällä epäformaalilla kielellä. Tällöin kyseiset opiskelijat saivat paremman käsityksen käsiteltävän aiheen todellisesta sisällöstä. Tämä ei tarkoita kuitenkaan sitä, että opettaja käyttäisi opetuksessaan virheellisiä ilmaisuja puhuessaan tai kirjoittaessaan matematiikkaa. Epäformaalin kielen käyttö matemaattisen kielen rinnalla voi kuitenkin olla avaintekijä oppimiseen.

5.4 Aineisto

Tutkimuksen aineistona toimii matematiikan opiskeluun vaikuttavia tekijöitä kartoittava kysely, kurssien Insinöörimatematiikka 1 ja 2 tenttitulokset, perustaitojen testin tulokset sekä matematiikkaklinikalla tapahtunut opiskelijoiden havainnointi.

5.4.1 Kyselylomake

Matematiikan opiskeluun vaikuttavien tekijöiden kartoittamiseksi laadittiin kysely, joka toteutettiin matematiikkaklinikalla oleville opiskelijoille. Tämän lisäksi samoja asioita selvitettiin suuremmalta opiskelijaryhmältä (kaksi Insinöörimatematiikan luentoryhmää). Luentoryhmille kysely toteutettiin marraskuussa 2009 ja matematiikkaklinikan ryhmille joulukuussa 2009. Kyselyt sisälsivät sekä suljettuja että avoimia kysymyksiä. Suljettujen kysymysten vastausasteikko toteutettiin Likertin neliportaisella asteikolla, jossa vastausvaihtoehtoina olivat täysin eri mieltä, osittain eri mieltä, osittain samaa mieltä ja täysin samaa mieltä.

Matematiikkaklinikka

Matematiikkaklinikalla toteutettuun kyselyyn vastasi 34 opiskelijaa. Kyselylomake välitettiin opiskelijoille sähköpostilla, ja opiskelijat palauttivat täytetyn lomakkeen seuraavalla pienryhmätunnilla. Selvitettäviä tekijöitä olivat matematiikan kurssien suorittamista vaikeuttavat tekijät, opiskelijoiden opiskelutavat matematiikassa, oppimistyyli, matematiikan merkitys ja tärkeys opiskelijalle sekä opiskelijan oma käsitys matematiikan osaamisestaan. Tämän lisäksi opiskelijoita pyydettiin vastaamaan matematiikkaklinikan toimintaan liittyviin kysymyksiin. Kyselylomake löytyy kokonaisuudessaan Liitteestä A.

Luentoryhmät

Luentoryhmille tarkoitettuun kyselyyn tuli vastauksia yhteensä 173 opiskelijalta. Kyselyyn osallistui kaksi Insinöörimatematiikan luentoryhmää, Insinöörimatematiikka B2 ja C2. Luentoryhmän B2 opiskelijat opiskelevat sähkötekniikan, tietojohtamisen ja tuotantotalouden koulutusohjelmissa. Näistä opiskelijoista 75 vastasi kyselyyn, joka toteutettiin erään luentokerran alussa. Opiskelijoilla oli aikaa noin 15 minuuttia vastata kysymyksiin. Kurssin Insinöörimatematiikka C2 suorittavat opiskelijat olivat konetekniikan, rakennustekniikan ja ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoita. Heille kysely jaettiin erään luennon alussa, ja opiskelijat palauttivat täytetyn lomakkeen seuraavalla luentokerralla. Kyselyyn vastasi 98 kyseisen luentoryhmän opiskelijaa.

Kyselylomake sisälsi taustatietoa opiskelijoista (sukupuoli, koulutusohjelma, opintojen aloitusvuosi, pääsykoetietoa), insinöörimatematiikan kurssien suorittamiseen liittyviä seikkoja, kysymyksiä matematiikan opiskelutavoista, matematiikan tärkeydestä ja merkityksestä opiskelijalle, opiskelijan omasta käsityksestä matematiikan osaamisestaan, oppimistyylistä sekä väittämiä matematiikan oppimisen vaikeuksista. Luentoryhmille laadittu kyselylomake on kokonaisuudessaan Liitteenä B.

5.4.2 Tenttiarvosanat

Tutkimuksen aineistona ovat myös kurssien Insinöörimatematiikka 1 ja 2 tenttitulokset syksyn 2009 toteutuskerroilta. Tutkimuksessa käsiteltäviä tenttejä ovat kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäinen ja toinen tentti sekä kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäinen tentti. Kyseisiin tentteihin osallistuneiden opiskelijoiden lukumäärät yllä olevassa järjestyksessä olivat 699, 231 ja 666.

5.5 Tutkimuskysymykset

Matematiikan opinnot yliopistotasolla tuottavat hankaluuksia osalle opiskelijoista. Tähän vaikuttavia mahdollisia tekijöitä ovat puutteelliset koulumatematiikan perustaidot, motivaation ja opiskelutaitojen puute, oppimisvaikeudet sekä opetukselliset näkökulmat. Lähtökohtana matematiikkaklinikan perustamiselle oli tukea opiskelijoita matematiikan opintojen alkuvaiheessa siten, että kyseisten opiskelijoiden matematiikan opinnot etenisivät tavoiteaikataulussa, sekä selvittää opintoihin vaikuttavia tekijöitä niin opiskelijan yksilöllisellä tasolla kuin opetuskäytänteiden näkökulmasta. Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää

1. Ketkä opiskelijat hakeutuivat matematiikkaklinikalle?

2. Miten matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneet opiskelijat erosivat muista samaa kurssia suorittavista opiskelijoista?

3. Oliko osallistumisella matematiikkaklinikan toimintaan vaikutusta opiskelijoiden opintomenestykseen?

4. Lisäsikö matematiikkaklinikalla käyminen opiskelijoiden matemaattista osaamista heidän omasta mielestään?

5. Tapahtuiko matematiikkaklinikan myötä muutosta opiskelijoiden asenteissa matematiikkaa kohtaan?

6. Miten opetusta tulisi kehittää matematiikkaklinikan toiminnasta saatujen tulosten perusteella?

5.6 Aineiston käsittely

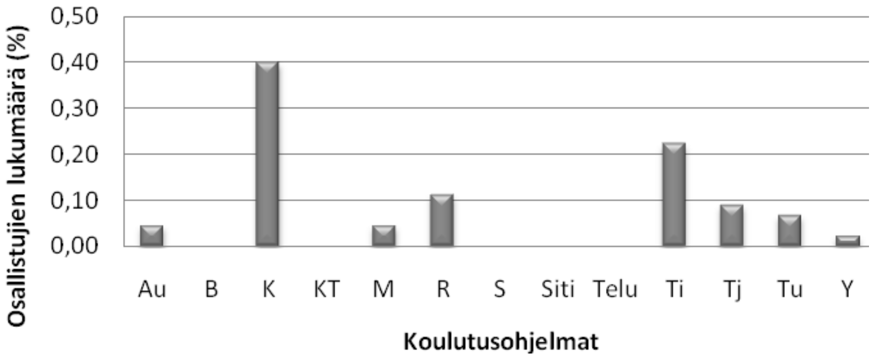
Aineiston käsittelyssä suljettujen kysymysten Likert-asteikko ohjelmoitiin siten, että täysin eri mieltä = 1, osittain eri mieltä = 2, osittain samaa mieltä = 3 ja täysin samaa mieltä = 4. Tutkimuksen tilastollinen aineisto koottiin havaintomatriiseihin. Näin saatua aineistoa oli helpompi tutkia ja suorittaa vertailuja. Muuttujien arvoissa olevan informaation pelkistämistä toteutettiin muutaman muuttujaa kuvaavaan tunnusluvun avulla. Kyselyiden suljetuista kysymyksistä laskettiin keskiarvot, mediaanit, keskihajonnat sekä vastausjakaumat.

Matematiikkaklinikkalaisten ja vertailuryhmien eroavaisuuksien selvittämiseksi tutkimuksessa käytettiin normaalijakaumaan pohjautuvaa t-testiä sekä ei-parametrista Mann-Whitneyn U-testiä, joka ei oleta taustalla olevan mitään erityistä jakaumaa. Näiden testien avulla kartoitettiin, onko ryhmien välillä tilastollisesti merkitsevää eroa tietyn muuttujan saamissa arvoissa 5 prosentin riskitasolla. Muuttujien tunnuslukujen selvittäminen ja yllä mainittujen testien suorittaminen tapahtui Excel-laskentaohjelmalla sekä Matlab-ohjelmistolla.

6 TUTKIMUSTULOKSET

6.1 Aineiston kuvailua

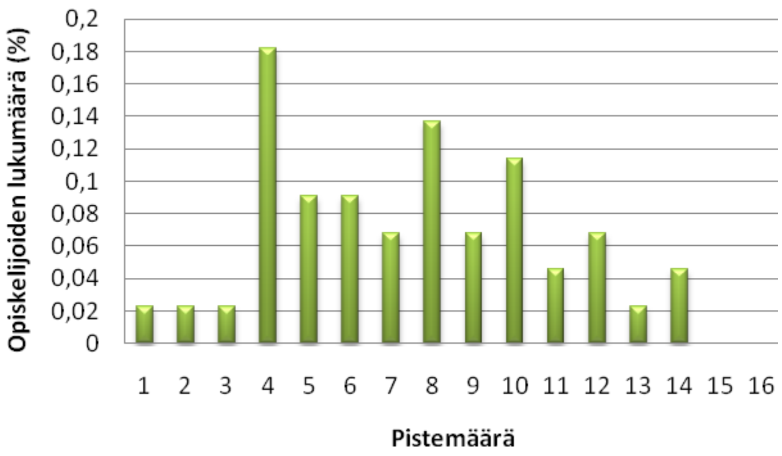
Matematiikkaklinikan toimintaan osallistui 48 opiskelijaa, joista miehiä oli 40 ja naisia 8. Alla oleva *Kuva 8* havainnollistaa toiminnassa mukana olleiden opiskelijoiden koulutusohjelmia. Kuvassa käytetyt lyhenteet ovat taulukoitu sivulla 52 luvussa 5.2. Matematiikkaklinikkalaisten koulutusohjelmajakauma poikkeaa vastaavasta kaikista TTY:n opiskelijoista muodostetusta jakaumasta (kts. *Kuva 7*). Matematiikkaklinikalla opiskelleista henkilöistä merkittävän osan muodostivat konetekniikan koulutusohjelman opiskelijat, joiden osuus oli 40 % kaikista toimintaan osallistuneista. Huomioitavaa oli myös, että opiskelijamääriltään isoista koulutusohjelmista sähkötekniikan opiskelijat eivät osallistuneet lainkaan klinikan pienryhmäopetukseen.



Kuva 8: *Matematiikkaklinikkaan osallistuneet opiskelijat koulutusohjelmittain*

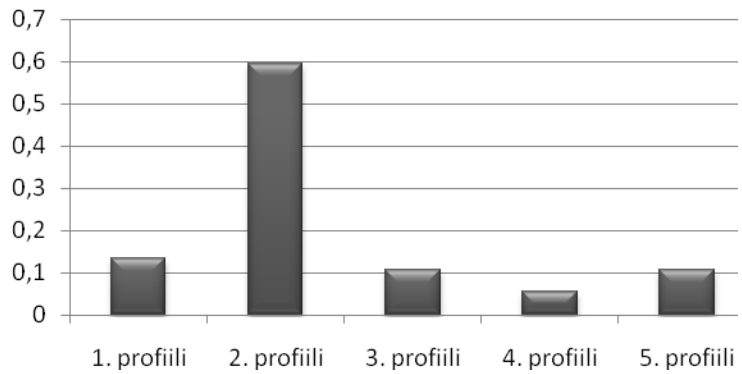
6.1.1 Perustaitojen testi

Perustaitojen testin suorittivat 44 matematiikkaklinikan opiskelijaa syksyn 2009 testissä. Näiden opiskelijoiden keskiarvoksi muodostui 7,43 keskihajonnan ollessa 3,29. Keskiarvo perustaitojen testissä oli tilastollisesti merkitsevästi heikompi verrattuna muiden Insinöörimatematiikan kurssien opiskelijoiden suoritusten keskiarvoon (8,63) samaisessa testissä riskitason ollessa 5 %. Mann-Whitneyn U-testin avulla laskettu *p-arvo* on $p = 0{,}0258$, ja t-testin vastaava tulos osoittaa vastaukseksi $p = 0{,}0239$. *Kuva 9* havainnollistaa matematiikkaklinikkalaisten pistemääräjakaumaa perustaitojen testissä. Pylväiden korkeudet esittävät opiskelijoiden prosentuaalisia lukumääriä koko 44 opiskelijan joukosta.



Kuva 9: *Matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneiden opiskelijoiden pistemääräjakauma perustaitojen testissä.*

Perustaitojen testin alussa oleva profilointikysymys kartoitti opiskelijoiden matematiikan oppimistapoja. Matematiikkaklinikkalaisten vastaukset kyseiseen kysymykseen on esitetty *Kuvassa 10*. Vertaisoppijoiksi on nimennyt itsensä 60 prosenttia pienryhmiin osallistuneista opiskelijoista. Kyseisten opiskelijoiden suhteellinen lukumäärä on huomattavasti suurempi kuin vertailuryhmän vastaava arvo (kts. *Kuva 5*). Profilointijakauma tukee osaltaan matematiikkaklinikan tapaisen toiminnan tärkeyttä, koska tällöin vertaisoppijat sekä tukea tarvitsevat opiskelijat saavat ympärilleen opetuksellisia rakenteita, jotka tukevat paremmin heidän oppimistaan, sekä tekevät oppimisympäristöstä mielekkäämmän. Profiilien kuvaukset on esitetty tarkemmin luvussa 5.1.



Kuva 10: *Matematiikkaklinikkalaisten profilointijakauma*

6.2 Matematiikkaklinikalla suoritetun kyselyn tuloksia

Matematiikkaklinikkalaisille teetetyn kyselyn toinen osio käsitteli Insinöörimatematiikan kurssien suorittamista vaikeuttavia tekijöitä. Osio muodostui erilaisista väittämistä, joiden vastaamiseen opiskelijalle oli annettu neljä eri vaihtoehtoa. Keskiarvojen perusteella mitattuna keskeisimpiä vaikeutta aiheuttavia tekijöitä olivat kurssin vaikeus (2,97), epämotivoivalta tuntuva kurssi (2,76) sekä massakurssi (2,74). Tällöin kyseisiin väittämiin valitsi vastausvaihtoehdoksi osittain samaa mieltä tai täysin samaa mieltä 76, 71 ja 62 prosenttia opiskelijoista yllä mainitussa järjestyksessä esitettynä. Sekä matematiikkaklinikalla että luentoryhmille teetetyn kyselyn monivalintatehtävien vastausjakaumat, keskiarvot, mediaanit sekä keskihajonnat on esitetty Liitteessä C. Opiskelijoiden vastauksia on havainnollistettu myös visuaalisesti käyttämällä boxplot-kuvaajia, jotka on esitetty myös samaisessa liitteessä.

Kyselyn seuraavassa osiossa opiskelijoita pyydettiin pohtimaan omia matematiikan opiskelutapoja sekä valitsemaan tämän jälkeen mielipidettään parhaiten kuvaava vaihtoehto esitettyjen väittämien vastaukseksi. Vastausten perusteella matematiikkaklinikan pienryhmätoimintaan osallistuneet opiskelijat *haluavat laskea tehtäviä mieluummin kavereiden kanssa kuin yksin* (3,12; 0,78), *käyvät matematiikan luennoilla säännöllisesti* (3,53; 0,86), *tekevät omia muistiinpanoja matematiikan luennoilla* (3,24; 0,85) sekä *kokevat hyvin tärkeäksi esimerkkitehtävät laskuharjoitustehtävien ratkaisemisen kannalta* (3,64; 0,82). Suluissa ilmoitetut luvut kertovat vastauksien keskiarvot ja keskihajonnat.

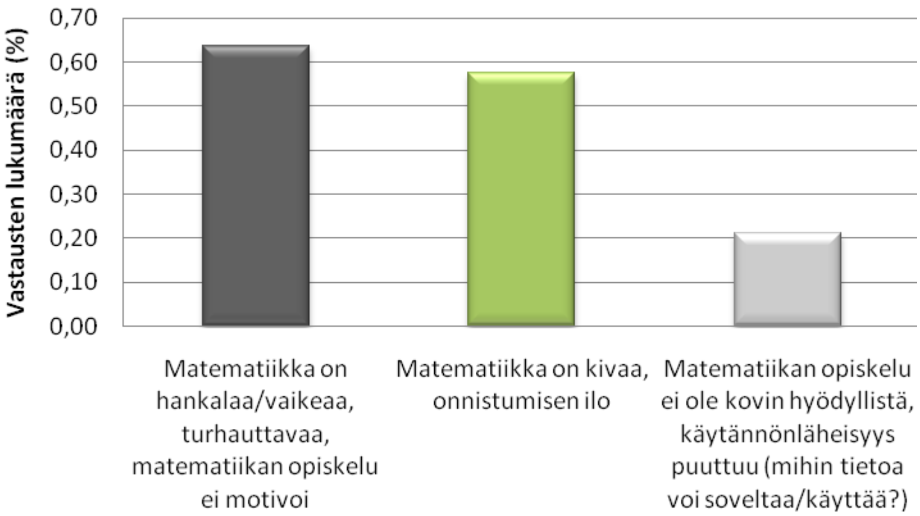
Opiskelijan omaa käsitystä matematiikan osaamisesta selvitettiin viiden väittämän avulla sekä yhden avoimen kysymyksen perusteella. Opiskelijoiden suhtautuminen lukiomatematiikkaan oli myönteistä, sillä väittämän *pidin lukiomatematiikasta* keskiarvoksi muodostui 3,18. Tämän lisäksi klinikan *opiskelijat kokivat menestyneensä hyvin lukiomatematiikassa* (keskiarvo 3,15). Kuitenkin 33 prosenttia vastasi väittämään, *minulla on puutteelliset koulumatematiikan* (peruskoulu ja lukio) taidot, valitsemalla vaihtoehdon osittain samaa mieltä tai täysin samaa mieltä. Väittämän keskiarvo oli 2,09 keskihajonnan ollessa 1,13. Opiskelijan omaa käsitystä matemaattisesta osaamisesta selvitettiin myös väittämällä, *olen mielestäni hyvä matematiikassa*. Vastausvaihtoehdon osittain eri mieltä oli valinnut 33 prosenttia ja 6 prosenttia opiskelijoista oli väittämän kanssa täysin eri mieltä. Vastausten keskiarvoksi muodostui 2,61 keskihajonnan saadessa arvon 0,70.

Matematiikkaklinikkalaisten ajatuksia matematiikan opiskelua kohtaan kartoitettiin seuraavalla avoimella kysymyksellä: *Minkälaista on opiskella matematiikkaa? Minkälaisia tuntemuksia matematiikan opiskelu herättää?* Opiskelijat saivat vastata siis kysymykseen omin sanoin ja kertoa päällimmäiset ajatuksensa aiheesta. Vastauksia käsiteltäessä esiin nousi kolme keskeisintä näkökulmaa, joita opiskelijat korostivat vastauksissaan. Näitä olivat

- Matematiikka on hankalaa / vaikeaa / turhauttavaa; matematiikan opiskelu ei motivoi
- Matematiikka on kivaa / palkitsevaa; onnistumisen ilo on hienoa

- Matematiikan opiskelu ei ole kovin hyödyllistä, käytännönläheisyys puuttuu (mihin tietoa voi soveltaa / käyttää?)

Kysymykseen vastasi 33 opiskelijaa. Alla oleva *Kuva 11* havainnollistaa opiskelijoiden ajatuksia matematiikan opiskelusta. Huomioitavaa on se, että sama opiskelija on voinut mainita vastauksessaan useammankin kuin yhden näkökulman yllä mainituista kolmesta keskeisimmästä ajatuksesta.



Kuva 11: *Matematiikkaklinikkalaisten keskeisimpiä ajatuksia kysymykseen, minkälaista on opiskella matematiikka? Minkälaisia tuntemuksia matematiikan opiskelu herättää?*

Matematiikan oppimisvaikeudet oli viimeinen yhteinen teema, joka sisältyi sekä matematiikkaklinikalla että luentoryhmille teetettyyn kyselyyn. Osio piti sisällään väittämiä, jotka kartoittivat joitakin oppimisen taustalla olevia vaikeuksia. Matematiikkaklinikkalaisista 48 prosenttia valitsi vaihtoehdon osittain samaa mieltä väittämään, *minulla on vaikeuksia sanallisesti esitettyjen matemaattisten ongelmien ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa*. Väittämän keskiarvoksi muodostui 2,42 keskihajonnan ollessa 0,75. Toinen esiin noussut väite oli seuraava: *Olen usein kykenemätön valitsemaan oikeaa strategiaa matemaattisen ongelman ratkaisussa* (keskiarvo 2,45 ja keskihajonta 0,90).

6.2.1 Matematiikkaklinikkalaisten ja vertailuryhmän eroavaisuuksia kyselyiden perusteella

Matematiikkaklinikkalaisille laaditun kyselyn vastausten analysoimiseksi laadittiin lähes samanlainen kysely vertailuryhmälle eroavaisuuksien määrittämiseksi. Suljettujen kysymysten vertailu tapahtui Mann-Whitneyn U-testin avulla. Tällöin oletuksena ei tarvinnut olla muuttujien jakautuminen normaalisti. U-testin avulla verrattiin matematiikkaklinikkalaisten ja vertailuryhmän vastausten mediaanien poikkeavuuksia toisistaan riskitason ollessa 5 %. Tilastollisesti merkitsevästi nämä kaksi ryhmää poikkesivat toisistaan alla esitettyjen muuttujien tapauksissa (*Taulukko 2*). Taulukossa käytetty lyhenne

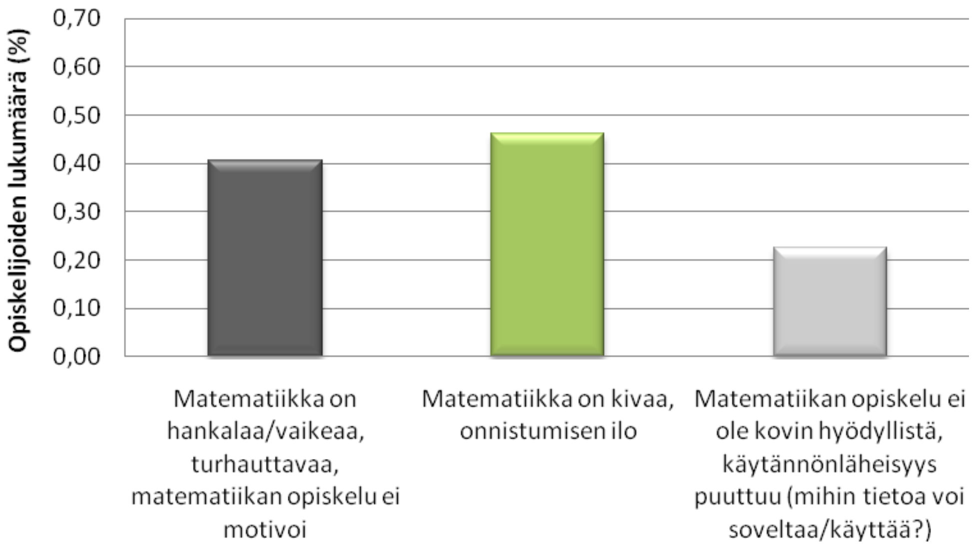
M tarkoittaa matematiikkaklinikkalaisia, V vertailuryhmää, $\bar{x}$ keskiarvoa, $q_{0,5}$ mediaania ja s keskihajontaa. Kokonaisuudessaan suljettujen kysymysten ryhmäkeskiarvot ja *p-arvot* on esitetty Liitteessä D.

Taulukko 2: *Tilastollisesti merkitsevästi poikkeavat muuttujat matematiikkaklinikkalaisten ja vertailuryhmän välillä.*

		$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s	p **-arvo**
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut työssäkäynti.	M V	1,42 1,16	1 1	0,94 0,57	0,0448
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut kurssin vaikeus	M V	2,88 2,35	3 2	0,78 0,79	0,0004
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut massakurssi	M V	2,74 2,15	3 2	0,9 0,89	0,0006
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut opiskelutaitojen puute	M V	2,5 2	2,5 2	0,79 0,85	0,0022
Kertaan tunnilla käydyn teorian ennen laskuharjoitustehtävien tekemistä.	M V	2,09 2,53	2 2	0,57 0,73	0,0033
Lasken tehtäviä mieluummin kavereiden kanssa kuin yksin	M V	3,12 2,76	3 3	0,78 0,81	0,0248
Minulla on puutteelliset koulumatematiikan (peruskoulu ja lukio) taidot	M V	2,09 1,64	2 1	1,13 0,87	0,0306
Menestyin hyvin lukiomatematiikassa	M V	3,15 3,42	3 4	0,8 0,77	0,029
Minulla on vaikeuksia matemaattisten symbolien ymmärtämisessä (esimerkiksi ongelmallista muistaa, kuinka integraalimerkkiä pitäisi käyttää).	M V	1,88 1,52	2 1	0,89 0,82	0,0106
Minulla on vaikeuksia sanallisesti esitettyjen matemaattisten ongelmien ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa.	M V	2,42 2,03	3 2	0,75 0,84	0,0095
Olen usein kykenemätön valitsemaan oikeaa strategiaa matemaattisen ongelman ratkaisussa.	M V	2,45 1,97	2 2	0,9 0,79	0,0033

Matematiikkaklinikan toimintaan osallistui työssäkäyviä henkilöitä. Pienryhmätoiminta tarjosi kyseisille opiskelijoille mahdollisuuden osallistua opetukseen ja tätä kautta paransi heidän edellytyksiään selviytyä matematiikan opinnoista. Matematiikkaklinikkalaisten arviot omista opiskelutaidoista olivat heikommat kuin vertailuryhmän opiskelijoiden. Opiskelutaitojen puute saattaa heijastua myös siinä, että klinikkalaiset eivät kertaa tunnilla käytyä teoriaa ennen laskuharjoitustehtävien tekemistä yhtä useasti kuin vertailuryhmäläiset. Koulumatematiikan perustaidoissa syntyi myös eroa näiden kahden ryhmän välillä. Vertailuryhmän opiskelijat kokevat voimakkaammin, että heidän koulumatematiikan taidoissa ei ole puutteita. Kyseiset opiskelijat myös menestyivät omasta mielestään lukiomatematiikassa klinikkalaisia paremmin. Sanalliset tehtävät tuottavat suurempia vaikeuksia klinikkalaisille ja heidän on usein hankalampaa valita oikeaa strategiaa matemaattisen ongelman ratkaisussa.

Vertailuryhmän ajatuksia matematiikan opiskelua kohtaan kartoitettiin seuraavalla myös klinikkalaisille teetetyllä avoimella kysymyksellä: *Minkälaista on opiskella matematiikkaa? Minkälaisia tuntemuksia matematiikan opiskelu herättää?* Vastaukset jaoteltiin samoihin kolmeen päällimmäiseen ajatukseen kuin matematiikkaklinikkalaistenkin tapauksessa. Matematiikkaklinikan opiskelijoista 64 prosenttia korosti vastauksissaan matematiikan vaikeutta ja motivaation puutetta. Vastaava luku vertailuryhmällä oli 40 prosenttia. Mukavana matematiikan opiskelua piti 46 prosenttia vertailuryhmän opiskelijoista, kun taas klinikkalaisista mielekkyyttä korosti 58 prosenttia vastanneista. Huomioitavaa on siis, että klinikkalaisista prosentuaalisesti suurempi osuus korosti vastauksissaan matematiikan vaikeutta, mutta silti myös matematiikan mielekkyys oli vahvemmin painotettuna matematiikkaklinikkalaisten vastauksissa. Käytännönläheisyyden puutetta painotti 23 prosenttia vertailuryhmäläisistä ja vastaavasti 21 prosenttia matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneista henkilöistä. Kuva 12 havainnollistaa vertailuryhmän vastausjakaumaa kyseiseen kysymykseen (vrt. Kuva 11)



Kuva 12: *Vertailuryhmäläisten keskeisimpiä ajatuksia kysymykseen, minkälaista on opiskella matematiikka? Minkälaisia tuntemuksia matematiikan opiskelu herättää?*

6.3 Havainnointi matematiikkaklinikalla

Opiskelijoiden matemaattisen osaamisen arviointi sekä oppimiseen vaikuttavien tekijöiden kartoitus havainnoinnin avulla on suhteellisen haastavaa varsinkin silloin, kun toiminnan kesto on lyhytaikaista. Havainnoinnin perusteella keskeisimmät vaikeudet, joita matematiikkaklinikan opiskelijat kokivat matematiikan opinnoissaan TTY:llä, olivat matemaattinen todistaminen, matemaattisten käsitteiden muistaminen ja sisäistäminen, tehtävänantojen sisäistäminen sekä puhutun ja kirjoitetun matemaattisen kielen ymmärtäminen. Usein pienryhmissä keskityttiin juuri matemaattisen kielen aiheuttamien hankaluuksien selvittämiseen. Opiskelijat kokivat hyvin tärkeäksi ja oppimista helpottavaksi, että matemaattista kieltä sekä käsitteitä käsiteltiin yhdessä arkikieltä lähempänä olevien ilmaisujen avulla esimerkiksi siten, että erilaisia määritelmiä ja lauseita havainnollistettiin yksinkertaisilla esimerkeillä.

Opiskelijoita havainnoimalla sekä kyselemällä pyrittiin selvittämään niitä tekijöitä ja matematiikan aihealueita, jotka tuottivat ongelmia. Alla on listattu muutamien opiskelijoiden toiminnasta saatuja havaintoja. Kyseiset opiskelijat ovat pääsääntöisesti sellaisia, jotka osallistuivat klinikan toimintaan jo ensimmäisen kurssin aikana, koska tuolloin ryhmäkoot olivat pieniä ja havaintojen tekeminen sekä opiskelijoiden kanssa keskusteleminen tämän takia helpompaa.

Opiskelija A:

Opiskellut peruskoulun ja lukion ulkomailla; kärsii lukihäiriöstä; ongelmia symbolien ymmärtämisessä; vaikeuksia peruslaskutoimitusten kanssa (esimerkiksi miten lasketaan $2\pi - \frac{\pi}{3}$*); ongelmia matemaattisen termistön kanssa (esimerkiksi mitä tarkoitetaan polaarikoordinaateilla); vaikeuksia matemaattisten merkintöjen kanssa (lausekkeet puutteellisesti kirjoitettuja); kuvat auttavat asioiden sisäistämisessä ja ymmärtämisessä.*

Opiskelija B:

Vaikeuksia lausekkeiden muokkaamisessa (esimerkiksi miten poistetaan sulut lausekkeesta $(2+3i)(1-2i)$*); vaikeuksia pitää ajatuksia kasassa jos tehtävä on pitkä. Tällöin opiskelija unohtaa helposti, mitä tehtävässä oikein piti tehdä; ongelmia tehtävän aloittamisessa; laskeminen hidasta; kokee että tukiopetuksesta on hyötyä: ”Pakko tulla tukiopetukseen. Minulla ei ole muuta vaihtoehtoa”.*

Opiskelija C:

On lukenut lukiossa lyhyen matematiikan; kompleksiluvut vieraita, joten sen kautta syntyvät suurimmat ongelmat; ongelmia tehtävän aloittamisessa (miten tehtävää pitäisi lähteä ratkaisemaan); tarvitsee usein pienen vihjeen, jotta pääsee tehtävässä eteenpäin.

Opiskelija E:

Todistaminen vaikeaa (mistä pitäisi lähteä liikkeelle, mitä tehtävänannossa tarkoitetaan, mitä pitäisi tehdä); matemaattiset käsitteet unohduksissa välivuoden takia; tehtävänannot välillä hyvin epäselviä hänen mielestä; peruslaskutoimitusten tekeminen onnistuu kohtuullisen hyvin.

Opiskelija F:

On yrittänyt suorittaa jo viime vuonna Insinöörimatematiikan kursseja, mutta ei läpäissyt tenttejä; paljon hankalia termejä sisäistettäväksi (esim. mitä tarkoittaa injektio, surjektio tai käänteiskuvaus); asiat auenneet paremmin nyt kuin viime vuonna (pystyy laskemaan laskuharjoitustehtäviä kotona, mikä ei onnistunut viime vuonna)

Opiskelija I

On suorittanut insinööriopinnot aikaisemmin ja työskentelee opintojen ohella, joten ei pysty osallistumaan luennoille; on pärjännyt nuorempana hyvin matematiikassa; suoriutuu peruslaskemisesta hyvin; todistustehtävät vaikeita; tehtävien aloittaminen välillä haastavaa.

Matemaattisen todistamisen vaikeuksiin tulisi kiinnittää voimakkaammin huomiota myös opetuksessa. Eräs ymmärrystä parantava toimintamalli voisi olla todistustehtävän ratkaisun välivaiheiden kirjoittaminen sanamuodossa matemaattisen kielen rinnalle. Eri välivaiheet tulisi myös perustella mahdollisimman perusteellisesti. Tällä tavoin opiskelijalla on mahdollisuus kehittää matemaattista ymmärrystään syvällisemmäksi sekä omaksua matemaattisen todistamisen periaatteita.

6.4 Matematiikkaklinikan hyödyllisyys ja tärkeys

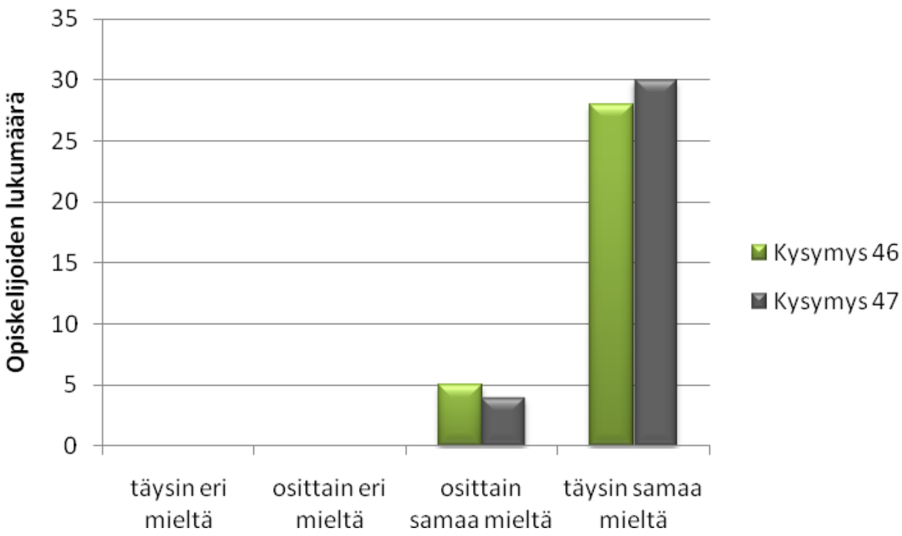
Insinöörimatematiikan kurssit koostuvat viikoittaisista luennoista sekä laskuharjoituksista. Opiskelijan on mahdollista valita, haluaako hän osallistua kahden vai kolmen tunnin laskuharjoituksiin. Osallistuminen kahden tunnin laskuharjoituksiin edellyttää, että opiskelija ratkaisee laskutehtävät etukäteen ja osallistuu laskuharjoituksiin olemalla läsnä. Tämän lisäksi opiskelija ilmoittaa harjoitustilaisuuden alkaessa tekemänsä tehtävät, joiden ratkaisut hän pyydettäessä esittää taululla. Kolmen tunnin laskuharjoituksissa noin puolet tehtävistä käsitellään samalla tavalla kuin kahden tunnin harjoituksissa, ja loput tehtävät opiskelijat laskevat paikanpäällä joko itsenäisesti tai muiden opiskelijoiden kanssa. Laskuharjoitusryhmien maksimikoko on 32 opiskelijaa. Oleellisin ero laskuharjoitus- ja matematiikkaklinikan ryhmien välillä oli ryhmäkoot. Pienen ryhmän ansiosta (noin 5-10 opiskelijaa) jokainen matematiikkaklinikan opiskelija sai henkilökohtaista ohjausta laskuharjoitustehtävien ratkaisemisessa. Tällaista henkilökohtaista ohjausta on monesti lähes mahdotonta toteuttaa isoissa laskuharjoitusryhmissä. Lisäksi matematiikkaklinikalla tehtäviä käsiteltiin ja ratkaistiin vaihtelevasti sekä koko ryhmän kesken että itsenäisesti laskien.

Matematiikkaklinikalla toteutetun kyselyn viimeinen osio käsitteli klinikan toimintaa ja opiskelijoiden ajatuksia kyseisistä pienryhmistä. Osio koostui suljetuista kysymyksistä, joissa opiskelijan tuli valita mielipidettään parhaiten kuvaava vaihtoehto esitettyihin väittämiin. Väittämät on esitetty alla olevassa *Taulukossa 3* tunnuslukuineen. Opiskelijoiden vastauksista on laskettu mediaanit, keskiarvot ja keskihajonnat kokonaiskuvan saamiseksi kyseisistä kysymyksistä.

Taulukko 3: *Opiskelijan ajatuksia matematiikkaklinikasta*

Kysymys	$q_{0,5}$	$\bar{x}$	s
Olen ollut tyytyväinen matematiikkaklinikan toimintaan.	4	3,88	0,33
Olen kokenut matematiikkaklinikan hyödylliseksi.	4	3,91	0,29
Matematiikkaklinikalla käynti on auttanut minua matematiikan kurssien suorittamisessa.	4	3,85	0,36
Matematiikkaklinikalla käyminen on lisännyt matematiikan osaamistani.	4	3,88	0,33
Minun on helpompi kysyä neuvoa matematiikkaklinikalla kuin laskuharjoituksissa.	4	3,88	0,41
Mielestäni laskuharjoitusten pitäisi olla samanlaisia kuin matematiikkaklinikan tunnit.	4	3,5	0,71

Opiskelijat kokivat, että matematiikkaklinikan toiminnalla on ollut vaikutusta heidän matemaattiseen osaamiseensa. Heidän mielestään toiminta on lisännyt heidän osaamistaan matematiikassa. Oppimisympäristönä matematiikkaklinikka oli suurimmalle osalle oppimista tukeva. Pienen ryhmän ansiosta jokaisen opiskelijan oli mahdollista saada henkilökohtaista tukea tehtävien ratkaisemiseen. Avoin ilmapiiri sekä kannustava opetustyyli loivat myös opiskelijalle puitteet mielekkääseen oppimiseen. Tehtäviä ratkaistaessa pienryhmiin pyrittiin saamaan keskusteleva ilmapiiri, jolloin jokaisen opiskelijan oli mahdollista tehdä kysymyksiä koko ryhmän kuullen. Tällä tavalla myös muut opiskelijat pystyivät osallistumaan keskusteluun, sekä korjaamaan omaa ehkä virheellistä käsitystä käsiteltävästä asiasta. Pienen ryhmän ansiosta opiskelijat ratkaisivat tehtäviä yhdessä sekä neuvoivat toinen toistaan tarvittaessa. Tällä tavalla toimintaan saatiin myös vertaisohjauksen piirteitä, mikä omalta osaltaan auttoi oppimistilanteessa suoriutumista. Väitteiden *Matematiikkaklinikalla käynti on auttanut minua matematiikan kurssien suorittamisessa* (kysymys 46) ja *Matematiikkaklinikalla käyminen on lisännyt matematiikan osaamistani* (kysymys 47) tarkemmat vastausjakaumat ovat esitetty *Kuvassa 13*.



Kuva 13: *Vastausjakaumat väittämiin, Matematiikkaklinikalla käynti on auttanut minua matematiikan kurssien suorittamisessa (kysymys 46); Matematiikkaklinikalla käyminen on lisännyt matematiikan osaamistani (kysymys 47).*

Suljettujen kysymysten lisäksi osio sisälsi kolme avointa kysymystä, joiden tarkoituksena oli selvittää, onko opiskelijoiden asenteessa matematiikkaa kohtaan tapahtunut muutosta matematiikkaklinikan myötä sekä, miten klinikan toimintaa voisi kehittää tulevaisuutta ajatellen. Seuraavaksi käsitellään tarkemmin juuri opiskelijoiden asenteiden muutosta toiminnan vaikutuksesta. Kysymyksen tarkka sanamuoto oli, *onko matematiikkaklinikan myötä tapahtunut muutosta asenteessasi matematiikkaa kohtaan.* Kolme opiskelijaa jätti vastaamatta kyseiseen kohtaan. Vastanneista 62 prosenttia (21 opiskelijaa) ilmoitti asenteensa muuttuneen pienryhmätoiminnan aikana. Seuraavassa joitakin opiskelijoiden vastauksia kysymykseen:

Opiskelija 2: ”*On, opin paljon helpommin matematiikkaa pienessä ryhmässä kuin istumalla massaluennolla, lisäksi pystyn matematiikkaklinikalla motivoitumaan paremmin oppimiseen.* ”

Opiskelija 3: ” *Klinikka on motivoinut, kun harkat on osannut ja uuden tekniikan opetellut. Lisäksi henkilökohtainen opetus klinikalla on arvokasta; ryhmäkoot laskareissa ovat liian isoja eikä asioista saa syvällistä ymmärrystä.*”

Opiskelija 11: ” *Matikkaklinikan avulla ymmärrys matematiikasta on kasvanut ja näin myös kiinnostus ja motivaatio on kasvanut*.”

Opiskelija 17: ” *Ehdottomasti, tehtävät selitetään yksinkertaisesti jonka jälkeen ne on helppo ratkaista.*”

Opiskelija 21: ”*Klinikalla on käyty läpi yksityiskohtaisia esimerkkejä, joiden avulla tunneilla yleisellä tasolla läpikäydyt asiat on helpompi ymmärtää. Suhtaudun matikan* *kursseihin positiivisemmin, kun tiedän, että on olemassa aika ja paikka, jossa asiat voi oikeasti sisäistää.”*

Vastaavasti 10 opiskelijaa oli sitä mieltä, että heidän asenteessaan matematiikkaa kohtaan ei ole tapahtunut muutosta pienryhmätoiminnan vaikutuksesta. Näiden vastausten joukossa oli kuitenkin sellaisia henkilöitä, jotka kertoivat, että heidän asenteensa matematiikkaa kohtaan ei ole muuttunut, koska he ovat kokeneet matematiikan opiskelun mukavana jo ennen matematiikkaklinikan toimintaa. Kolme opiskelijaa vastasi lyhyesti kysymykseen kielteisesti sen enempää vastaustaan perustelematta. Alla on esitetty muutamien opiskelijoiden vastauksia käsiteltävään kysymykseen:

Opiskelija 5: ” *No eipä varsinaisesti. Pienryhmässä opiskelu on varsin mukavaa. Muutaman tapaamisen jälkeen keskustelu on varsin vapautunutta jolloin esiin nousee uusia kysymyksiä.”*

Opiskelija 12: ” *Lähinnä helpotusta ja ihana oikopolku ymmärtämiseen. -Kiitos.”*

Opiskelija 19: ” *No minulla on ollut aina positiivinen asenne matikkaa kohtaan, se ei ole muuttunut.”*

Opiskelija 25: ” *Asenne on hyvä, joten mitä sitä muuttamaan. ”*

Opiskelija 27: ” *Ei oikeastaan, mutta klinikan jälkeen matematiikka tuntuu hieman inhimillisemmältä.”*

Saatujen vastausten perusteella matematiikkaklinikan tapainen opetusmuoto tulisi muodostaa kiinteän kokonaisuuden opetuksellisissa rakenteissa. Toiminnan avulla tukea tarvitsevien opiskelijoiden on mahdollista saada enemmän henkilökohtaista opastusta ja neuvoja matematiikan opinnoissa sekä vertaisoppijoille tarjotaan opiskeluympäristö, jossa he voivat opiskella yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa ja näin edistää oppimistaan.

6.5 Matematiikkaklinikkalaisten menestyminen matematiikan opinnoissa

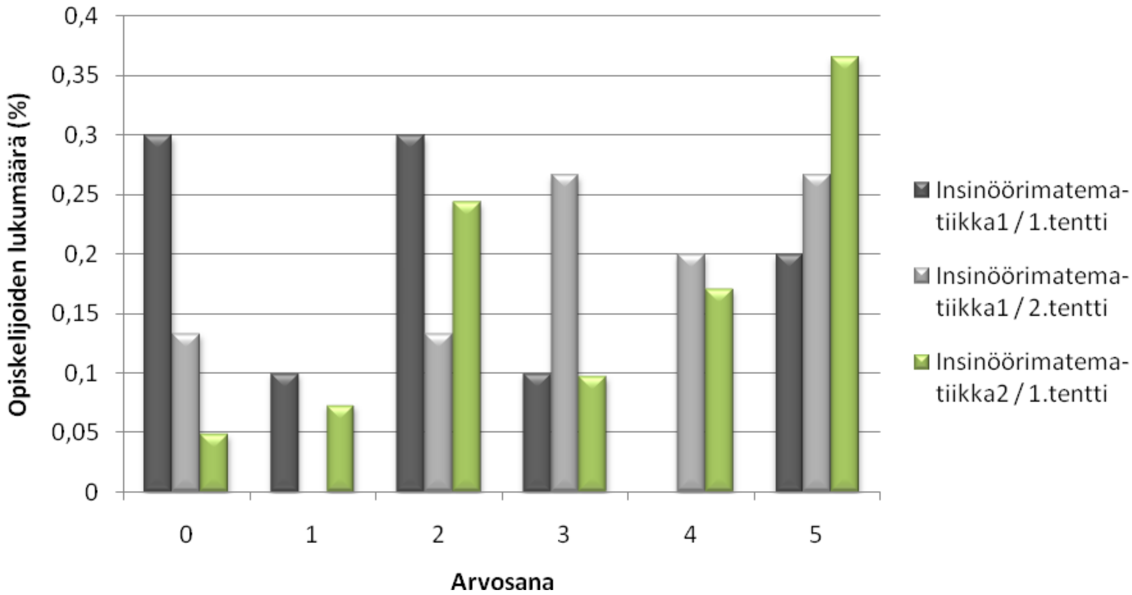
Matematiikkaklinikan keskeisenä tarkoituksena oli tukea opiskelijoita pakollisten matematiikan kurssien suorittamisessa ja tenttien läpäisemisessä. Tätä näkökulmaa käsiteltäessä tutkimuksen aineistoksi kerättiin tietoa opiskelijoiden tenttisuorituksista kursseilla Insinöörimatematiikka 1 ja 2. Kurssista Insinöörimatematiikka 1 käsiteltiin ensimmäistä ja toista tenttiä ja jälkimmäisestä kurssista tutkimusaineiston muodosti kurssin ensimmäinen tentti. Juuri kyseisten tenttien valintaan vaikutti oleellisesti se, että matematiikkaklinikan toiminta ajoittui näiden tenttien ajankohtaan. Matematiikkaklinikkalaisten arvosanajakaumat, keskiarvot ja keskihajonnat ovat esitetty kokonaisuudessaan Liitteessä E.

Matematiikkaklinikan toiminta keskittyi viikoittaisten laskuharjoitustehtävien laskemiseen. Tämän lisäksi jokainen pienryhmä kokoontui ennen kurssin tenttiä kertaamaan kurssin keskeisiä asioita vanhoja tenttitehtäviä tekemällä. Kertaustunnit olivat kestoltaan kahden tunnin mittaisia, jonka aikana opiskelijat laskivat pitkälti opettajajohtoisesti tehtäviä. Käsiteltävät tehtävät oli toimitettu opiskelijoille jo etukäteen, jolloin heillä oli mahdollisuus tutustua ja ratkaista tehtäviä myös itsenäisesti ennen tunteja. Tämän lisäksi opiskelijat saivat kysyä neuvoa myös muihin heitä mietityttäneisiin tehtäviin tai teoriaosuuksiin. Useat opiskelijat lähestyivät myös sähköpostin välityksellä ennen tenttitilaisuutta, ja pyysivät apua erilaisiin ongelmatilanteisiin, joita olivat kohdanneet valmistautuessaan tenttiin.

Kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäiseen tenttiin osallistui 10 matematiikkaklinikan opiskelijaa, joista kolme ei läpäissyt tenttiä. Ryhmän keskiarvoksi muodostui 2,0 keskihajonnan ollessa 1,89. Kyseisen tentin jälkeen uuden periodin ja kurssin alkaessa matematiikkaklinikalla opiskelevien henkilöiden määrä kasvoi merkittävästi. Toisen periodin aikana mukaan tuli 36 uutta opiskelijaa, joista 14 oli saanut arvosanaksi 0 kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä.

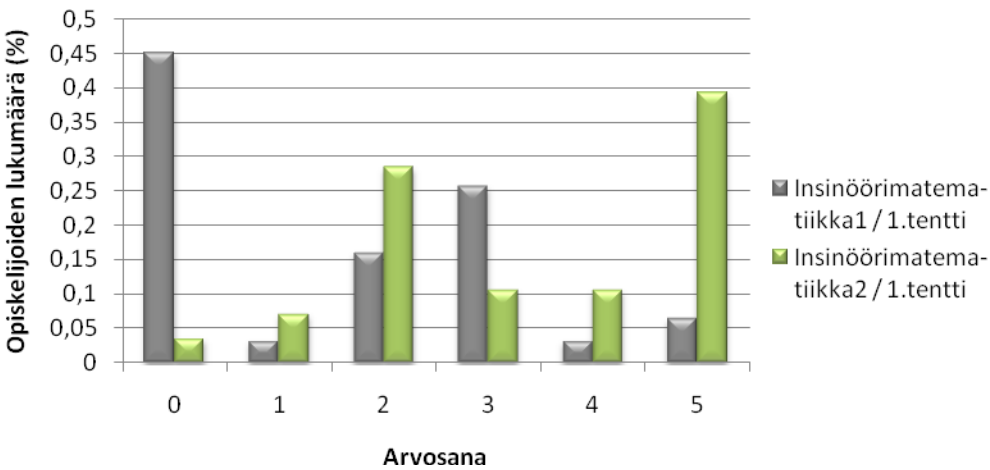
Niiden opiskelijoiden kanssa, jotka halusivat osallistua kurssin Insinöörimatematiikka 1 toiseen tenttiin, valmistauduimme uusintatenttiin kahden tunnin mittaisella kertaavalla opetustuokiolla. Kaikki kertaustunnit olivat täsmälleen samanlaisia, eli tuntien sisältö koostui vanhojen tenttitehtävien ratkaisemisesta ja läpikäynnistä koko ryhmän kanssa yhteisesti. Opiskelijat kokivat kertaustunnit hyvin tarpeellisina ja toivoivat, että ne olisivat kestoltaan vielä pitempiä, jolloin ryhmän kanssa voitaisiin kerrata myös teoriaosuuksia yksityiskohtaisemmin. Kurssin Insinöörimatematiikka 1 toiseen tenttiin osallistui 15 klinikan opiskelijaa. Nämä opiskelijat olivat siis sellaisia, jotka saapuivat yhteiselle kertaustunnille ennen koetta. Kyseisten henkilöiden keskiarvoksi muodostui 3,2 keskihajonnan ollessa 1,66. Opiskelijoista kaksi ei läpäissyt tenttiä.

Kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäiseen tenttiin osallistui 41 matematiikkaklinikkalaista. Heidän tenttisuoritustensa keskiarvo oli 3,37 ja keskihajonnaksi muodostui 1,59. Kyseisistä opiskelijoista vain kaksi sai arvosanaksi nollan. *Kuva 14* havainnollistaa opiskelijoiden saamien arvosanojen jakautumista näissä kolmessa tässä tutkimuksessa tarkasteltavassa tentissä.



Kuva 14: *Matematiikkaklinikkalaisten tenttiarvosanat*

Mielenkiintoinen näkökulma on myös kiinnittää huomiota niihin opiskelijoihin, jotka tulivat pienryhmätoimintaan mukaan toisen kurssin alkaessa. Näiden opiskelijoiden keskiarvo kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä oli 1,58, jolloin he eivät siis vielä opiskelleet matematiikkaklinikalla. Toisen kurssin ensimmäisessä tentissä kyseisten opiskelijoiden keskiarvoksi muodostui 3,36. Tämän kurssin ajan he siis osallistuivat pienryhmätoimintaan. Alla oleva *Kuva 15* sisältää näiden opiskelijoiden arvosanajakaumat kummassakin tentissä. Toisen kurssin aikana mukaan tulleista henkilöistä 45 prosenttia (14 opiskelijaa) sai arvosanaksi nollan kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisestä tentistä. Pienryhmätoimintaan osallistumisen jälkeen kyseisistä opiskelijoista vain 3,6 prosenttia (1 opiskelija) ei läpäissyt kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäistä tenttiä.



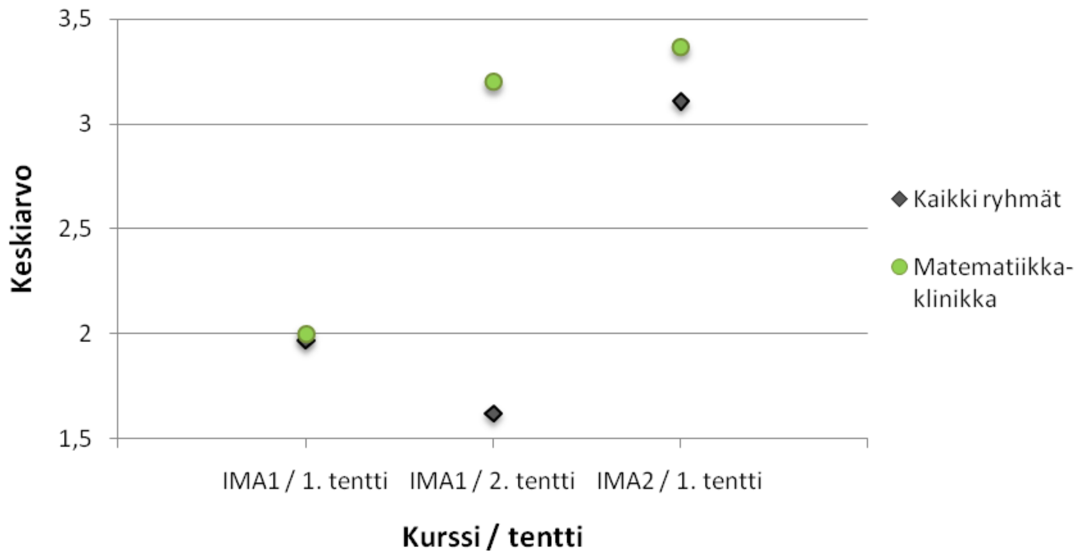
Kuva 15: *Niiden opiskelijoiden tenttiarvosanojen jakaumat, jotka osallistuivat matematiikkaklinikan toimintaan vain kurssin Insinöörimatematiikka 2 aikana.*

6.5.1 Matematiikkaklinikkalaisten tenttimenestyksen vertailua muihin opiskelijoihin

Kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäiseen tenttiin osallistui matematiikkaklinikkalaisten lisäksi 699 opiskelijaa. Näiden opiskelijoiden kohdalta kokeen keskiarvoksi muodostui 1,97 keskihajonnan ollessa 1.84. Matematiikkaklinikkalaisten keskiarvo samaisesta kokeesta oli 2,00, joten tenttitulosten keskiarvojen välille ei syntynyt tilastollisesti merkitsevää eroa. Huomioitavaa on kuitenkin se, että matematiikkaklinikalla opiskelevien henkilöiden tulosten keskiarvo perustaitojen testissä oli heikompi kuin muiden opiskelijoiden. Kyseiseen tenttiin osallistuneista opiskelijoista 37 prosenttia sai arvosanaksi nollan, kun taas matematiikkaklinikkalaisista 30 prosenttia ei läpäissyt tenttiä.

Kurssin Insinöörimatematiikka 1 toiseen tenttiin osallistui 231 opiskelijaa, jotka eivät olleet mukana matematiikkaklinikan toiminnassa. Näiden henkilöiden keskiarvo kyseisessä tentissä oli 1,55 ja keskihajonnaksi muodostui 1,60. Opiskelijoista 40 prosenttia (86 opiskelijaa) ei läpäissyt tenttiä. Vastaavasti matematiikkaklinikkalaisten keskiarvo ja keskihajonta olivat 3,2 ja 1,66. Tällöin vain 13 prosenttia (2 opiskelijaa) sai arvosanakseen nollan, joka on huomattavasti pienempi prosentuaalinen määrä verrattuna muihin samaan tenttiin osallistuneisiin henkilöihin. Kokonaisuudessaan pienryhmiin osallistuneiden opiskelijoiden keskiarvo eroaa 5 prosentin riskitasolla tilastollisesti merkitsevästi muiden opiskelijoiden muodostamasta tentin keskiarvosta. Mann-Whitneyn U-testi ilmoitti *p-arvoksi* $0{,}00051$, kun taas t-testin avulla saatu luku oli $p = 0{,}0018$.

Kolmas tarkasteltava tentti oli kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäinen tentti. Matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneiden opiskelijoiden lisäksi kyseisen tentin suorittivat 625 opiskelijaa. Heidän saamien tenttiarvosanojen keskiarvoksi muodostui 3,09 keskihajonnan ollessa 1,68. Vastaavasti matematiikkaklinikkalaisten keskiarvo ja keskihajonta olivat samaisessa tentissä 3,37 ja 1,59. Keskiarvojen välillä ei ole tilastollisesti merkitsevää eroa. Kuitenkin on huomioitava, että matematiikkaklinikkalaiset suoriutuivat perustaitojen testistä heikommin kuin muut Insinöörimatematiikan kursseja suorittavat opiskelijat ja tämän lisäksi toisen kurssin aikana klinikan toimintaan mukaan tulleiden opiskelijoiden opintomenestys kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä oli huonompi verrattuna muihin opiskelijoihin. *Kuva 16* havainnollistaa matematiikkaklinikkalaisten ja muiden opiskelijoiden keskiarvoja tämän tutkimuksen aineistona olevissa kolmessa tentissä. Kuvan lyhenteet IMA1 ja IMA2 viittaavat kursseihin Insinöörimatematiikka 1 ja 2. Matematiikkaklinikkalaisten ja vertailuryhmien tenttiarvosanajakaumat, keskiarvot ja keskihajonnat ovat taulukoitu yksityiskohtaisesti Liitteessä E.

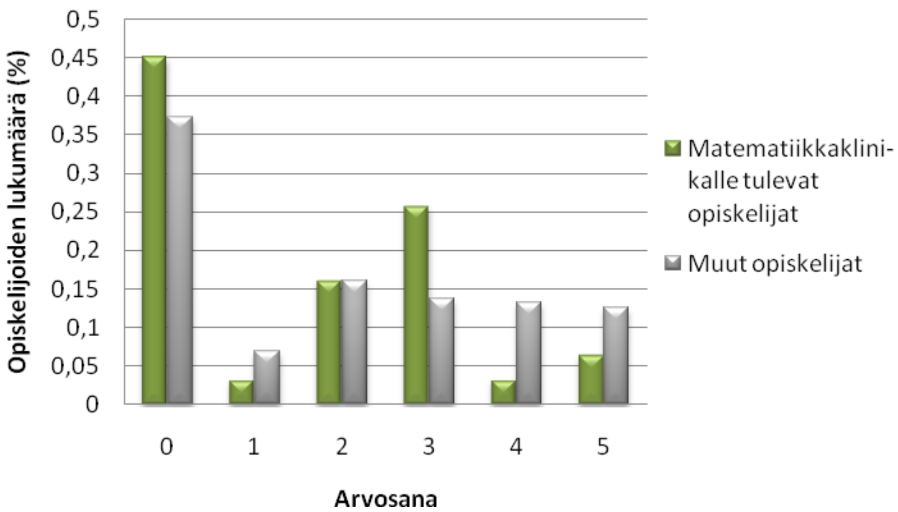


Kuva 16: *Keskiarvojen vertailua*

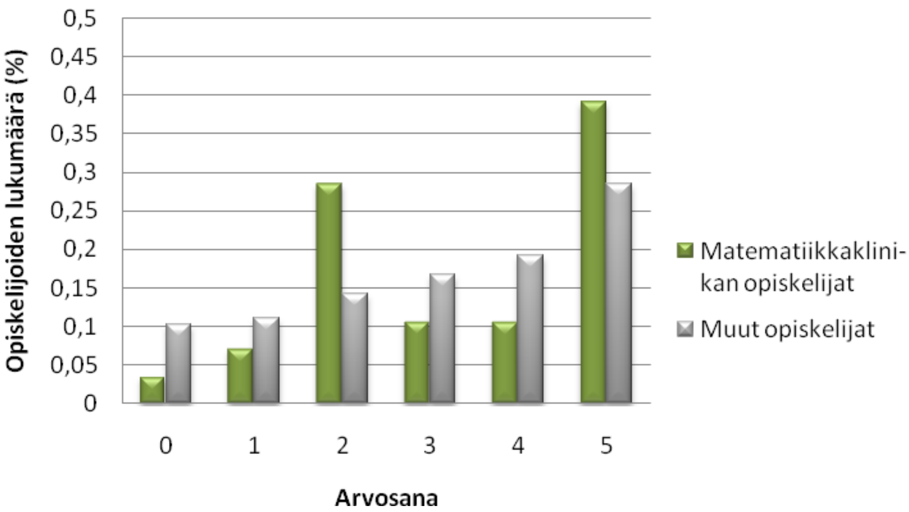
Seuraavaksi tutkimme niiden opiskelijoiden, jotka saivat kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisestä tentistä arvosanan 0, suoriutumista kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäisessä tentissä ja vertaamme heidän saamiaan arvosanoja matematiikkaklinikkalaisten arvosanoihin. Matematiikkaklinikan opiskelijoista käsittelemme siis vain niitä opiskelijoita, jotka saivat myös arvosanan 0 kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisestä tentistä ja osallistuivat klinikan toimintaan vasta kurssin Insinöörimatematiikka 2 aikana. Vertailuryhmän keskiarvoksi muodostui 1,99 keskihajonnan ollessa 1,58. Opiskelijoista 24 prosenttia (35 opiskelijaa) ei läpäissyt tenttiä. Vastaavasti matematiikkaklinikkalaisten keskiarvo samaisessa tentissä oli 2,58 ja keskihajonnaksi tuli 1,68. Kyseisistä klinikan opiskelijoista vain yksi (8 prosenttia) sai arvosanaksi nollan. Tulokset osoittavat, että matematiikkaklinikkalaiset menestyivät kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäisessä tentissä paremmin kuin muut vastaavassa lähtötilanteessa olleet opiskelijat. Merkityksellistä on myös se, että tentin läpäisseiden kyseisten klinikan opiskelijoiden prosentuaalinen lukumäärä oli selkeästi korkeampi verrattuna vertailuryhmän vastaavaan lukuun.

Mielenkiintoisen näkökulman antaa myös niiden opiskelijoiden kurssimenestyksen tarkastelu ja vertailu, jotka osallistuivat matematiikkaklinikan toimintaan vasta kurssin Insinöörimatematiikka 2 aikana. Kyseisten opiskelijoiden keskiarvo kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä oli 1,58, jolloin 45 prosenttia ei läpäissyt kyseistä tenttiä. Vastaavasti muiden kuin klinikkalaisten keskiarvoksi samaisessa tentissä muodostui 1,97, ja 37 prosenttia opiskelijoista sai arvosanaksi nollan. Näiden tietojen perusteella voimme päätellä, että kyseiset matematiikkaklinikkalaiset menestyivät heikommin yllä mainitussa tentissä niin keskiarvolla kuin läpipääsyprosentilla mitattuna.

Pienryhmätoimintaan osallistumisen jälkeen kyseisten klinikkalaisten keskiarvo kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäisessä tentissä oli 3,36 ja arvosanan 0 sai 3,6 prosenttia opiskelijoista (1 opiskelija). Muiden opiskelijoiden keskiarvoksi tuli 3,09, jolloin tenttiä ei läpäissyt 10,2 prosenttia opiskelijoista. Lukujen perusteella matematiikkaklinikkalaiset menestyivät paremmin kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäisessä tentissä sekä keskiarvon että läpipääsyprosentin näkökulmasta. Kyseiset matematiikkaklinikkalaiset olivat siis lähtötasoltaan muita opiskelijoita heikompia, mutta pienryhmätoiminnan jälkeen heidän opintomenestyksensä oli muita parempi keskiarvon ja läpipääsyprosentin perusteella. *Kuva 17* esittää arvosanajakaumia kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä. Matematiikkaklinikalle tulevat opiskelijat eivät siis osallistuneet klinikan toimintaan ensimmäisen Insinöörimatematiikan kurssin aikana, jonka seurauksena lähtötilanteena voidaan pitää kyseistä jakaumaa. Tämän jälkeen edellä mainitut opiskelijat osallistuivat pienryhmäopetukseen kurssin Insinöörimatematiikka 2 aikana. *Kuva 18* havainnollistaa heidän sekä muiden opiskelijoiden menestymistä kyseisen kurssin ensimmäisessä tentissä.



Kuva 17: *Arvosanajakaumat kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä.*



Kuva 18: *Arvosanajakaumat kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäisessä tentissä.*

Kurssiarvosanojen vertailu tukee myös omalta osaltaan matematiikkaklinikan tapaisen pienryhmätoiminnan tärkeyttä matematiikan opinnoista suoriutumisen näkökulmasta. Saadut tulokset osoittavat, että toiminnalla on ollut vaikutusta opiskelijoiden menestymiseen matematiikan kursseilla. Pienryhmissä opiskelu on auttanut tenttien läpipääsyprosenttien kasvattamisessa tutkittujen tenttien kohdalla. Luotettavampien tulosten saamiseksi toimintaa tulisi jatkaa siten, että opiskelijoiden matematiikan opinnoissa menestymistä ja ajatuksia matematiikkaa kohtaan seurattaisiin pitempikestoisen opetuskokeilun avulla. Saadut tulokset ovat suuntaa antavia, mutta puoltavat vahvasti pienryhmätoiminnan tärkeyttä.

6.6 Opetuksen kehittäminen

Matematiikkaklinikan opiskelijoille suoritetun kyselyn avulla saadut tulokset osoittavat, että opetuksellisia rakenteita kehitettäessä ja muokatessa erityistä huomiota tulisi kiinnittää ryhmäkokojen pienentämiseen. Tätä kautta myös luentoihin olisi mahdollista luoda vuorovaikutteisempi opiskeluympäristö. Opiskelijoiden vastauksissa niin kyselyssä kuin pienryhmissä tapahtuneiden keskustelujen aikana korostui hyvin voimakkaasti esimerkkitehtävien tärkeys oppimisessa. Tähän tulisikin kiinnittää erityistä huomiota ja erityisesti siten, että opiskelijoille tarjottaisiin sovellusesimerkkejä, jotka liittyvät opiskelijoiden omaan koulutussuuntaukseen. Tällä tavoin motivaation kasvu on todennäköistä ja samalla opiskelijat tuntevat matematiikan opinnot hyödylliseksi osaksi opintojensa kokonaisuutta. Luennoilla käytyjä esimerkkitehtäviä tulisi myös käydä läpi huolellisesti kohta kohdalta ja antaa opiskelijoille tarttumakohtia, kuinka tehtävää tulisi alkaa käsitellä. Aiemmin opetettujen käsitteiden ja ominaisuuksien säännöllinen kertaaminen opetuksen edetessä auttaa omalta osaltaan opiskeltavan asian sisäistämisessä.

Oletusarvona ei saisi olla, että opiskelijat hallitsevat lähes kaiken aikaisemmin käsitellyistä aihealueista.

Niin luentojen kuin laskuharjoitustenkin keskeisenä päämääränä tulisi olla avoimen ja keskustelevan ilmapiirin luominen. Avaintekijöinä tällaisen ilmapiirin luomiseen ovat opettajan iloinen ja ystävällinen tyyli opiskelijoita kohdatessa, jolloin korostuu myös tasavertaisuuden painottaminen. Tällöin jokaiseen opiskelijaan suhtaudutaan samalla tavalla riippumatta hänen matemaattisista taidoistaan. Suhtautuminen opiskelijoihin tasavertaisesti on opetuksen ja ohjauksen keskeisiä tekijöitä. Opiskelijoita ei tule arvottaa matemaattisen osaamisensa perusteella, eikä myöskään opettajan tulisi korostaa omaa matemaattista osaamistaan tavalla, joka heikentää opiskelijoiden itseluottamusta omiin matemaattisiin kykyihinsä. Opiskelijoita pitäisi rohkaista ja kehottaa kysymään heitä mietityttäviä seikkoja myös koko ryhmän kuullen, ja opetuksessa tulisi korostaa erityisesti sitä, että opiskelijoiden ei tarvitse pelätä epäonnistumisia. Monesti on hyvin suotavaa, että esiin nousee virheellisiä käsityksiä, jolloin aihetta voidaan käsitellä yhdessä ja samalla korjata mahdollisesti muidenkin opiskelijoiden virheellisiä käsityksiä kyseisestä aiheesta. Olennaista on korostaa juuri virheellisten käsitysten näkökulmaa opiskelijoille, koska tätä kautta on mahdollista tukea opiskelijoiden oppimista sekä lisätä opettajan ja opiskelijoiden välistä luottamusta ja siten osaltaan parantaa opiskelijoiden uskoa omiin kykyihinsä.

Opetuksellisia rakenteita tulisi uudistaa siten, että opiskelijoille tarjottaisiin matematiikkaklinikan tapaisia laskuharjoitusryhmiä. Tällaisten pienryhmien keskeinen ajatus on opiskelijoiden henkilökohtainen ohjaus. Tällöin opetuksessa tulisi vahvasti korostua kärsivällisyys, jolloin laskuharjoituksia pitävä henkilö neuvoo ja selventää opiskelijoille henkilökohtaisesti samoja asioita tarvittaessa useampaankin kertaan. Matemaattisen aihesisällön käsittelyä tulisi tapahtua myös yhteisesti laskuharjoituksissa siten, että teoriaa selitettäisiin tarvittaessa uudelleen lähtien liikkeelle perusasioista. Joitakin käsitteitä tai ominaisuuksia voitaisiin lähestyä lukiomatematiikan avulla, jonka jälkeen aihetta laajennettaisiin kyseistä tilannetta vastaavaksi. Yksinkertaisten tilannetta selventävien havaintoesimerkkien käyttäminen on myös keskeisessä asemassa niin laskuharjoitusryhmissä kuin luennoillakin. Laskuharjoitusryhmien toiminta ei tarvitse olla vain opiskelijoiden itsenäistä laskemista. Pienryhmätuntien eteneminen voisi vaihdella itsenäisestä laskemisesta ryhmän kanssa yhdessä ratkaistaviin tehtäviin. Pohdittaessa yhdessä tehtäviä opettajan tulisi saada aikaan vapautunut keskusteleva ilmapiiri. Henkilökohtaisessa kuin myös koko ryhmän ohjauksessa tulisi korostua matemaattisten käsitteiden selittäminen matemaattisen kielen lisäksi myös opiskelijaystävällisemmällä epäformaalilla kielellä. Tällöin kyseiset opiskelijat saisivat paremman käsityksen käsiteltävän aiheen todellisesta sisällöstä. Tämä ei tarkoita kuitenkaan sitä, että opettaja käyttäisi opetuksessaan virheellisiä ilmaisuja puhuessaan tai kirjoittaessaan matematiikkaa. Epäformaalin kielen käyttö matemaattisen kielen rinnalla voi kuitenkin olla avaintekijä oppimiseen.

Pienryhmissä tapahtuneen havainnoinnin perusteella keskeisimmät vaikeudet, joita matematiikkaklinikan opiskelijat kokivat matematiikan opinnoissaan TTY:llä, olivat matemaattinen todistaminen, matemaattisten käsitteiden muistaminen ja sisäistäminen, tehtävänantojen sisäistäminen sekä puhutun ja kirjoitetun matemaattisen kielen ymmärtäminen. Usein pienryhmissä keskityttiin juuri matemaattisen kielen aiheuttamien hankaluuksien selvittämiseen. Opiskelijat kokivat hyvin tärkeäksi ja oppimista helpottavaksi, että matemaattista kieltä sekä käsitteitä käsiteltiin yhdessä arkikieltä lähempänä olevien ilmaisujen avulla esimerkiksi siten, että erilaisia määritelmiä ja lauseita havainnollistettiin yksinkertaisilla esimerkeillä. Opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota erityisesti esimerkki- ja laskuharjoitustehtävien tehtävänantoihin, jotka tulisivat muotoilla siten, että opiskelijoilla olisi mahdollisimman hyvät edellytykset lähteä ratkaisemaan kyseistä tehtävää. Matemaattisen todistamisen vaikeuksiin pitäisi kiinnittää voimakkaammin huomiota myös opetuksessa. Eräs ymmärrystä parantava toimintamalli voisi olla todistustehtävän ratkaisun välivaiheiden kirjoittaminen sanamuodossa matemaattisen kielen rinnalle. Eri välivaiheet tulisi myös perustella mahdollisimman perusteellisesti. Tällä tavoin opiskelijalla on mahdollisuus kehittää matemaattista ymmärrystään syvällisemmäksi sekä omaksua matemaattisen todistamisen periaatteita.

6.7 Tutkimuksen luotettavuus

Tämän tutkimuksen keskeisenä ideana oli induktio, jolloin pyrittiin tutkimuksen otoksen avulla selvittämään yleisesti pienryhmätoiminnan vaikutuksia matematiikan oppimiseen. On hyvä muistaa, että ihmistieteiden yksi peruskysymys on, voidaanko ihmisen käyttäytymistä perustella kausaalisesti. Yleensä kuitenkin oletuksena on se, että ihmisellä on vapaa tahto. Toisaalta oletamme, että ihmisen käyttäytymistä ohjaavat myös ulkoiset kausaaliset voimat. Joten tästä näkökulmasta on siis osittain perusteltua, että ihmisen käyttäytymistä selitetään kausaalisesti. Kuitenkin täytyy muistaa, että ihmistieteiden kohdalla tulokset eivät koskaan ole absoluuttisesti oikeita. (Uusitalo, 1997)

Tutkimuksen luotettavuutta pohdittaessa keskeisiä termejä ovat validiteetti ja reliabiliteetti. Molemmat termit tarkoittavat tutkimuksen luotettavuutta. Reliabiliteetin sisältö viittaa tutkimuksen toistettavuuteen, kun validiteetin keskeinen luotettavuussisältö on puolestaan se, että mitataanko sitä, mitä on tarkoitus mitata (Metsämuuronen, 2003). On tärkeää pohtia, että missä määrin on onnistuttu mittaamaan juuri sitä mitä pitikin mitata. Validiteetin mittaaminen tapahtuu usein siten, että mittaustuloksia verrataan vain todelliseen tietoon mitattavasta asiasta (Uusitalo, 1997). Reliabiliteettiin on mahdollista vaikuttaa ainakin tutkimusaineiston huolellisella käsittelyllä. Sen sijaan tutkimuksen toteuttajan on vaikeampi vaikuttaa esimerkiksi siihen, jos kyselyyn vastaava henkilö muistaa jonkin asian väärin, merkitsee vastauksen väärin tai ymmärtää kysymyksen toisin kuin tutkimuksen tekijät ovat sen ajatelleet.

6.7.1 Validiteetti

Validiteetin keskeinen sisältö on se, että onko tutkimuksessa mitattu juuri sitä ominaisuutta tai asiaa, mitä oli tarkoitus mitata. Usein validiteetti jaetaan sisäiseen ja ulkoiseen validiteettiin. Ulkoinen validius tarkastelee yleisesti ottaen sitä, kuinka yleistettävä tutkimus on (Metsämuuronen, 2003). Tämän tutkimuksen kohdejoukon muodosti 48 opiskelijaa, joten otoskoko ei ollut kovin suuri. Tämän takia pienryhmätoiminnasta saadut tulokset tulee käsitellä ennemminkin suuntaa-antavina tuloksina. Vertaamalla saatuja tuloksia teoriaosuudessa (luvussa 3.7.1) käsiteltyihin Harper Adams University Collegen tutkimustuloksiin, jotka olivat saavutettu opetuksellisten rakenteiden ja tukitoimien muutoksilla, voidaan todeta, että tulokset ovat samansuuntaisia. Harper Adams University Collegessa toteutetut muutokset olivat toki huomattavasti laajemmat, mutta myös heidän uudistuksissaan korostui pienryhmätoiminta. Toiminnan avulla pystyttiin parantamaan opiskelijoiden suoriutumista matematiikan opinnoissa niin heidän oppilaitoksessaan kuin myös TTY:llä.

Tutkimuksen sisäisen validiteetin tarkastelu käsittää lähinnä sitä, että mittaako tutkimuksessa käytetty mittari todella sitä, mitä sen pitää mitata, ovatko käytetyt käsitteet selkeästi määriteltyjä ja onko teoria oikein valittu. Tässä tutkimuksessa kartoitettiin, ketkä opiskelijat hakeutuivat matematiikkaklinikalle ja miten kyseiset opiskelijat erosivat muista samaa kurssia suorittavista opiskelijoista. Pienryhmätoimintaan osallistuneista opiskelijoista kerättiin nimilista jokaisen tunnin alussa. Tällä tavoin saatiin tarkka luettelo kyseisistä opiskelijoista, heidän koulutusohjelmistaan, perustaitojen testin tuloksista sekä tenttiarvosanoista. Matematiikan opiskeluun ja oppimiseen vaikuttavia tekijöitä kartoitettiin kyselyn avulla, joka toteutettiin matematiikkaklinikkalaisille ja luentoryhmistä muodostetulle vertailuryhmälle. Kyselyiden sisältö laadittiin yhdessä useamman TTY:llä työskentelevän henkilön kanssa, jolloin sisällön monipuolisuus ja tutkittavat tekijät tuli huomioitua kattavasti. Kyselyt sisälsivät niin suljettuja kuin avoimiakin kysymyksiä, mikä lisäsi tutkittavasta aiheesta saadun aineiston laajuutta ja monipuolisuutta. Kyselyn vertailuryhmän muodosti 173 opiskelijaa. Kyseiset opiskelijat olivat kahdesta eri luentoryhmästä. Mahdollisimman totuudenmukaisten tulosten saamiseksi olisi ollut parempi, jos vastauksia olisi saatu kaikista neljästä luentoryhmästä. Lisäksi tuloksiin on osaltaan vaikuttanut myös se, että vastaukset kerättiin luentojen yhteydessä. Tällöin sellaiset opiskelijat, jotka eivät osallistuneet aktiivisesti opetukseen, jäivät huomioimatta tutkimustuloksissa.

Lisäksi tutkimuksessa selvitettiin, oliko osallistumisella matematiikkaklinikan toimintaan vaikutusta opiskelijoiden opintomenestykseen sekä tapahtuiko pienryhmätoiminnan myötä muutosta opiskelijoiden asenteissa matematiikkaa kohtaan. Matematiikkaklinikan opiskelijoille toteutettu kysely sisälsi seuraavat väittämät: olen kokenut matematiikkaklinikan hyödylliseksi; matematiikkaklinikalla käynti on auttanut minua matematiikan kurssien suorittamisessa; matematiikkaklinikalla käynti on lisännyt matematiikan osaamistani. Kyseisistä väittämistä saatujen vastausten perusteella sekä perustaitojen testin että tenttitulosten avulla saatiin opiskelijoiden matematiikan opintomenestyksestä monipuolisesti tietoa. Huomioitavaa on kuitenkin, että tässä tutkimuksessa käsiteltävä pienryhmätoiminta oli hyvin lyhytkestoinen. Luotettavampien tulosten saamiseksi tulisi kyseistä toimintaa toteuttaa pitemmän aikaa. Tällöin myös pienryhmiä ohjaava henkilö oppisi tuntemaan opiskelijat paremmin ja sitä kautta arvioimaan monipuolisemmin heidän matemaattista osaamistaan ja sen kehitystä.

Tutkimuksessa pohdittiin myös, miten opetusta tulisi kehittää pienryhmätoiminnasta saatujen tulosten perusteella. Tutkimuksen taustalla oleva teoria lähestyy aihetta monesta eri näkökulmasta. Näiden näkemysten perusteella sekä tämän tutkimuksen aineiston avulla on pohdittu opetuksen kehittämistä sekä opettajan että luento- ja laskuharjoitusryhmien näkökulmasta kuitenkin siten, että tarkastelun keskiössä on ollut matematiikkaklinikan pienryhmätoiminta. Tämän takia esimerkiksi TTY:n vallitsevia luentokäytänteitä on käsitelty vain opiskelijoilta saatujen mielipiteiden avulla. Taustateoria, pienryhmissä käytetyt toimintamallit sekä opiskelijoiden mielipiteet ovat olleet olennaisimmat tekijät opetuksen kehittämisen linjauksissa.

6.7.2 Reliabiliteetti

Reliabiliteetilla tarkoitetaan mittauksen toistettavuutta, ja se voidaan laskea kolmella eri tavalla: rinnakkaismittauksella (samaan aikaan eri mittarilla), toistomittauksilla (eri aikaan samalla mittarilla) tai mittarin sisäisen konsistenssin, johdonmukaisuuden kautta (samaan aikaan samalla mittarilla). Tässä tutkimuksessa reliabiliteetin määrittämiseksi ei ole suoritettu toistomittauksia eikä mittarin sisäisen konsistenssin laskemista. Rinnakkaismittausta on pyritty tekemään tutkimusaineiston monipuolisuuden avulla.

Sekä kyselyn, havainnoinnin että koetulosten perusteella matematiikkaklinikan toimintaan osallistumisella oli myönteistä vaikutusta opiskelijoiden opintomenestykseen sekä suhtautumisessa matematiikkaa kohtaan. Saadut tulokset eri mittareilla (kysely, havainnointi ja koetulokset) olivat samansuuntaiset, mikä lisää tutkimuksen reliabiliteettia tutkittaessa opiskelijoiden opintomenestystä. Tämän lisäksi matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneiden ja muiden samaa kurssia suorittavien henkilöiden välisiä eroja pystyttiin määrittämään samanaikaisesti usealla eri tavalla. Näitä olivat toteutetut kyselyt, perustaitojen testin tulokset, tiedot opiskelijoiden koulutusohjelmista, sekä tenttitulokset. Kyseisen aineiston avulla oli mahdollista määrittää eroavaisuudet mahdollisimman monipuolisesti. Kuitenkin on muistettava, että saadut tulokset ovat osittain sidoksissa tutkimuksen aikana mukana olleisiin matematiikkaklinikan opiskelijoihin. Ryhmän muotoutumiseen voi oleellisesti vaikuttaa esimerkiksi ystävyyssuhteet. Opiskelijat, joiden kavereita on mukana toiminnassa, osallistuvat itsekin helpommin kyseiseen toimintaan. Tämän takia myöhemmin toteutettava pienryhmäopiskelu voi muodostua osittain erilaisesta opiskelijajoukosta. Matematiikkaklinikan opiskelijoiden ohjaamisesta vastasi vain yksi henkilö, millä saattaa myös olla vaikutusta saatuihin tuloksiin sekä niiden toistettavuuteen.

7 YHTEENVETO JA PÄÄTELMIÄ

Tampereen teknillisellä yliopistolla on havaittu, että matematiikan opinnot tuottavat todellisia vaikeuksia osalle opiskelijoista. Koulumatematiikan ja yliopistossa käsiteltävän matematiikan välisen kuilun pienentämiseksi on välttämätöntä kehittää matematiikan tukitoimia sekä toimintamalleja, jotka paremmin tukisivat ja edistäisivät matematiikan oppimista yliopistotasolla.

Matematiikan tukiopetuskokeilu, matematiikkaklinikka, kehitettiin matematiikan opiskeluissa tukea tarvitsevien opiskelijoiden sekä vertaisoppijoiden ohjaamiseen ja opettamiseen Tampereen teknillisellä yliopistolla. Ensimmäiset tukiopetusryhmät muodostettiin syyskuun 2009 aikana. Tukitoiminnasta kiinnostuneet opiskelijat jaettiin pieniin, luentoryhmäkohtaisiin ryhmiin, joissa kussakin oli 5-10 matematiikan opiskelussa tukea tarvitsevaa opiskelijaa. Tukiopetusryhmissä olevat henkilöt suorittivat kursseja Insinöörimatematiikka 1 ja 2. Jokainen ryhmä kokoontui kerran viikossa kahdeksi tunniksi kerrallaan. Tukiopetus keskittyi lukiomatematiikan kertaukseen sekä yliopistomatematiikan tukemiseen. Pääpaino pienryhmäopetuksen sisällössä kohdistui kuitenkin Insinöörimatematiikan kurssien laskuharjoitustehtäviin, joita opiskelijat yrittivät ratkaista yhdessä opiskelukavereiden kanssa ja tarvittaessa pyysivät neuvoa pienryhmien ohjaajalta ongelmakohtien ratkaisemisessa.

Matematiikkaklinikan alkaessa toimintaan osallistui 12 opiskelijaa. Toisen periodin (kurssin Insinöörimatematiikka 2) aikana matematiikkaklinikan pienryhmiin osallistuvien lukumäärä kasvoi lähes 50 opiskelijaan, jolloin ryhmiä muodostettiin lisää, mutta samalla ryhmäkokoja jouduttiin kasvattamaan. Tutkimuksen kohdejoukko koostui matematiikkaklinikan toimintaan osallistuneista opiskelijoista sekä vertailuryhmän muodostivat opiskelijat, jotka suorittivat kursseja Insinöörimatematiikka 1 ja 2 syksyllä 2009.

Matematiikkaklinikan pienryhmiin osallistuneiden opiskelijoiden matematiikan opintoihin vaikuttavia tekijöitä ja opintomenestystä pyrittiin kartoittamaan hankitun aineiston perusteella. Tutkimuksessa käytetyn aineiston kerääminen tapahtui kyselylomakkeen avulla sekä tenttitulosten, perustaitojen testin että matematiikkaklinikalla tapahtuneen havainnoinnin perusteella. Matematiikan opiskeluun vaikuttavien tekijöiden kartoittamista selvittävä kysely toteutettiin matematiikkaklinikalla oleville opiskelijoille. Tämän lisäksi samoja asioita selvitettiin suuremmalta opiskelijaryhmältä (kaksi Insinöörimatematiikan luentoryhmää). Luentoryhmille kysely toteutettiin marraskuussa 2009 ja matematiikkaklinikan ryhmille joulukuussa 2009, joihin vastasi 173 ja 34 opiskelijaa yllä mainitussa järjestyksessä. Kyselyt sisälsivät sekä suljettuja että avoimia kysymyksiä. Suljettujen kysymysten vastausasteikko toteutettiin Likertin neliportaisella asteikolla, jossa vastausvaihtoehtoina olivat täysin eri mieltä = 1, osittain eri mieltä = 2, osittain samaa mieltä = 3 ja täysin samaa mieltä = 4. Tutkimuksen aineistona toimi myös kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäinen ja toinen tentti sekä kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäinen tentti syksyn 2009 toteutuskerroilta. Kyseisiin kurssikokeisiin osallistuneiden opiskelijoiden lukumäärät yllä olevassa järjestyksessä olivat 699, 231 ja 666.

Tässä tutkimuksessa kartoitettiin ketkä opiskelijat hakeutuivat matematiikkaklinikalle ja miten kyseiset opiskelijat erosivat muista samaa kurssia suorittavista opiskelijoista. Lisäksi selvitettiin oliko osallistumisella matematiikkaklinikan toimintaan vaikutusta opiskelijoiden opintomenestykseen sekä tapahtuiko pienryhmätoiminnan myötä muutosta opiskelijoiden asenteissa matematiikkaa kohtaan, ja miten opetusta tulisi kehittää toiminnasta saatujen tulosten perusteella. Matematiikkaklinikkalaisten ja vertailuryhmien eroavaisuuksien selvittämiseksi tutkimuksessa käytettiin normaalijakaumaan pohjautuvaa t-testiä sekä ei-parametrista Mann-Whitneyn U-testiä.

Matematiikkaklinikan toimintaan osallistui 48 opiskelijaa, joista miehiä oli 40 ja naisia 8. Toiminnassa mukana olevia henkilöitä oli kahdeksasta eri koulutusohjelmasta, mutta selkeästi suurimman ryhmän muodostivat konetekniikan opiskelijat. Perustaitojen testin, jonka tarkoituksena on antaa tietoa opiskelijoiden matemaattisesta osaamisesta opintojen alkaessa, suorittivat 44 matematiikkaklinikan opiskelijaa syksyn 2009 testissä. Testi sisälsi 16 lukiomatematiikan perustehtävää, ja suoritus tapahtui tietokoneavusteisesti. Matematiikkaklinikkalaisten keskiarvoksi muodostui 7,43, joka oli tilastollisesti merkitsevästi heikompi riskitason ollessa 5 % verrattuna muiden Insinöörimatematiikan kurssien opiskelijoiden suoritusten keskiarvoon (8,63) samaisessa testissä.

Matematiikkaklinikkalaisille tehdyn kyselyn perusteella keskeisimpiä vaikeutta aiheuttavia tekijöitä Insinöörimatematiikan kurssin suorittamisessa olivat *kurssin vaikeus* (2,97), *epämotivoivalta tuntuva kurssi* (2,76) sekä *massakurssi* (2,74). Tämän lisäksi matematiikkaklinikan pienryhmätoimintaan osallistuneet opiskelijat *halusivat laskea tehtäviä mieluummin kavereiden kanssa kuin yksin* (3,12; 0,78), *kävivät matematiikan luennoilla säännöllisesti* (3,53; 0,86), *tekivät omia muistiinpanoja matematiikan luennoilla* (3,24; 0,85) sekä *kokivat hyvin tärkeäksi esimerkkitehtävät laskuharjoitustehtävien ratkaisemisen kannalta* (3,64; 0,82). Suluissa ilmoitetut luvut kertovat vastauksien keskiarvot ja keskihajonnat. Opiskelijoiden suhtautuminen lukiomatematiikkaan oli myönteistä, sillä väittämän *pidin lukiomatematiikasta* keskiarvoksi muodostui 3,18. Tämän lisäksi klinikan *opiskelijat kokivat menestyneensä hyvin lukiomatematiikassa* (keskiarvo 3,15). Kuitenkin 33 prosenttia vastasi väittämään, *minulla on puutteelliset koulumatematiikan (peruskoulu ja lukio) taidot*, valitsemalla vaihtoehdon osittain samaa mieltä tai täysin samaa mieltä. Väittämän keskiarvo oli 2,09 keskihajonnan ollessa 1,13. Opiskelijan omaa käsitystä matemaattisesta osaamisesta selvitettiin myös väittämällä, *olen mielestäni hyvä matematiikassa*. Vastausvaihtoehdon osittain eri mieltä oli valinnut 33 prosenttia ja 6 prosenttia opiskelijoista oli väittämän kanssa täysin eri mieltä.

Matematiikkaklinikkalaisten ajatuksia matematiikan opiskelua kohtaan kartoitettiin seuraavalla avoimella kysymyksellä: *Minkälaista on opiskella matematiikkaa? Minkälaisia tuntemuksia matematiikan opiskelu herättää?* Vastauksia käsiteltäessä esiin nousi kolme keskeisintä näkökulmaa, joita opiskelijat korostivat vastauksissaan. Näitä olivat matematiikka on hankalaa / vaikeaa / turhauttavaa, matematiikan opiskelu ei motivoi; matematiikka on kivaa / palkitsevaa, onnistumisen ilo on hienoa; matematiikan opiskelu ei ole kovin hyödyllistä, käytännönläheisyys puuttuu (mihin tietoa voi soveltaa / käyttää?). Kysymykseen vastanneista 64 prosenttia koki matematiikan vaikeana, kun taas 58 prosenttia opiskelijoista kertoi vastauksessaan matematiikan olevan mukavaa. Käytännönläheisyyden ja hyödyllisyyden vähäisyyttä korostivat 21 prosenttia vastanneista. Oppimisen vaikeuksia käsittelevän osion huomioitavia seikkoja olivat sanallisesti esitettyjen matemaattisten ongelmien ymmärtämisen ja ratkaisemisen vaikeudet sekä välillä kykenemättömyys oikean strategian valitsemisessa matemaattisen ongelman ratkaisussa.

Matematiikkaklinikkalaiset arvioivat omat opiskelutaitonsa heikommiksi kuin vertailuryhmän opiskelijat. Opiskelutaitojen puute saattaa heijastua myös siinä, että klinikkalaiset eivät kerranneet tunnilla käytyä teoriaa ennen laskuharjoitustehtävien tekemistä yhtä useasti kuin vertailuryhmäläiset. Koulumatematiikan perustaidoissa syntyi myös eroa näiden kahden ryhmän välillä. Vertailuryhmän opiskelijat kokivat voimakkaammin, että heidän koulumatematiikan taidoissa ei ole puutteita. Kyseiset opiskelijat myös menestyivät omasta mielestään lukiomatematiikassa klinikkalaisia paremmin. Sanalliset tehtävät tuottavat suurempia vaikeuksia klinikkalaisille ja heidän on usein hankalampaa valita oikeaa strategiaa matemaattisen ongelman ratkaisussa.

Opiskelijat kokivat, että matematiikkaklinikan toiminta on lisännyt heidän osaamistaan matematiikassa. Lisäksi 62 prosenttia kyseisistä opiskelijoista ilmoitti asenteensa matematiikkaa kohtaan muuttuneen myönteisempään suuntaan pienryhmätoiminnan aikana. Oppimisympäristönä matematiikkaklinikka oli suurimmalle osalle oppimista tukeva. Pienen ryhmän ansiosta jokaisen opiskelijan oli mahdollista saada henkilökohtaista tukea tehtävien ratkaisemiseen. Avoin ilmapiiri sekä kannustava opetustyyli loivat myös opiskelijalle puitteet mielekkääseen oppimiseen. Tehtäviä ratkaistaessa pienryhmiin pyrittiin saamaan keskusteleva ilmapiiri, jolloin jokaisen opiskelijan oli mahdollista tehdä kysymyksiä koko ryhmän kuullen. Tällä tavalla myös muut opiskelijat pystyivät osallistumaan keskusteluun, sekä korjaamaan omaa ehkä virheellistä käsitystä käsiteltävästä asiasta. Pienen ryhmän ansiosta opiskelijat ratkaisivat tehtäviä yhdessä sekä neuvoivat toinen toistaan tarvittaessa. Tällä tavalla toimintaan saatiin myös vertaisohjauksen piirteitä, mikä omalta osaltaan auttoi oppimistilanteessa suoriutumista. Saatujen tulosten perusteella matematiikkaklinikan tapainen opetusmuoto tulisi muodostaa kiinteän kokonaisuuden opetuksellisissa rakenteissa. Toiminnan avulla tukea tarvitsevien opiskelijoiden on mahdollista saada enemmän henkilökohtaista opastusta ja neuvoja matematiikan opinnoissa sekä vertaisoppijoille tarjotaan opiskeluympäristö, jossa he voivat opiskella yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa ja näin edistää oppimistaan.

Kyselyn avulla saadut tulokset osoittavat, että opetuksellisia rakenteita kehitettäessä ja muokatessa erityistä huomiota tulisi kiinnittää ryhmäkokojen pienentämiseen. Tätä kautta myös luentoihin olisi mahdollista luoda vuorovaikutteisempi oppimisympäristö. Opiskelijoiden vastauksissa niin kyselyssä kuin pienryhmissä tapahtuneiden keskustelujen aikana korostui hyvin voimakkaasti esimerkkitehtävien tärkeys oppimisessa. Tähän tulisikin kiinnittää erityistä huomiota ja erityisesti siten, että opiskelijoille tarjottaisiin sovellusesimerkkejä, jotka liittyvät opiskelijoiden omaan koulutussuuntaukseen. Tällä tavoin motivaation kasvu on todennäköistä ja samalla opiskelijat tuntevat matematiikan opinnot hyödylliseksi osaksi opintojensa kokonaisuutta. Luennoilla käytyjä esimerkkitehtäviä tulisi myös käydä läpi huolellisesti kohta kohdalta ja antaa opiskelijoille tarttumakohtia tehtävän ratkaisemiseksi. Aiemmin opetettujen käsitteiden ja ominaisuuksien säännöllinen kertaaminen opetuksen edetessä auttaa omalta osaltaan opiskeltavan asian sisäistämisessä. Oletusarvona ei saisi olla, että opiskelijat hallitsevat lähes kaiken aikaisemmin käsitellyistä aihealueista.

Pienryhmätoiminnan hyödyllisyyttä kartoitettiin myös opiskelijoiden tenttimenestyksen perusteella. Kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäiseen tenttiin osallistui 10 matematiikkaklinikan opiskelijaa, joista kolme ei läpäissyt koetta. Ryhmän keskiarvoksi muodostui 2,0 keskihajonnan ollessa 1,89. Tenttiin osallistui matematiikkaklinikkalaisten lisäksi 699 opiskelijaa. Kokeen keskiarvoksi heidän osaltaan muodostui 1,97 keskihajonnan ollessa 1.84. Tenttitulosten keskiarvojen välille ei syntynyt tilastollisesti merkitsevää eroa. Huomioitavaa on kuitenkin se, että matematiikkaklinikalla opiskelevien henkilöiden tulosten keskiarvo perustaitojen testissä oli heikompi kuin muiden opiskelijoiden. Kyseiseen tenttiin osallistuneista opiskelijoista 37 prosenttia sai arvosanaksi nollan, kun taas matematiikkaklinikkalaisista 30 prosenttia ei läpäissyt tenttiä.

Edellä käsitellyn tentin jälkeen uuden periodin ja kurssin alkaessa matematiikkaklinikalla opiskelevien henkilöiden määrä kasvoi merkittävästi. Toisen periodin aikana mukaan tuli 36 uutta opiskelijaa, joista 14 oli saanut arvosanaksi 0 kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä. Kurssin Insinöörimatematiikka 1 toiseen tenttiin osallistui 15 klinikan opiskelijaa. Nämä opiskelijat olivat siis sellaisia, jotka saapuivat yhteiselle kertaustunnille ennen tenttiä. Tämän lisäksi tenttiin osallistui 231 opiskelijaa, jotka eivät olleet mukana matematiikkaklinikan toiminnassa. Näiden henkilöiden keskiarvo kyseisessä tentissä oli 1,55 ja keskihajonnaksi muodostui 1,60. Opiskelijoista 40 prosenttia (86 opiskelijaa) ei läpäissyt koetta. Vastaavasti matematiikkaklinikkalaisten keskiarvo ja keskihajonta olivat 3,2 ja 1,66. Tällöin vain 13 prosenttia (2 opiskelijaa) sai arvosanakseen nollan, joka on huomattavasti pienempi prosentuaalinen määrä verrattuna muihin samaan tenttiin osallistuneisiin henkilöihin. Kokonaisuudessaan pienryhmiin osallistuneiden opiskelijoiden keskiarvo eroaa 5 prosentin riskitasolla tilastollisesti merkitsevästi muiden opiskelijoiden muodostamasta kokeen keskiarvosta.

Kolmas tarkasteltava tentti oli kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäinen tentti, johon osallistui 41 matematiikkaklinikkalaista. Tämän lisäksi kyseisen tentin suoritti 625 opiskelijaa, joiden tenttiarvosanojen keskiarvoksi muodostui 3,09 keskihajonnan ollessa 1,68. Vastaavasti matematiikkaklinikkalaisten keskiarvo ja keskihajonta olivat samaisessa tentissä 3,37 ja 1,59. Keskiarvojen välillä ei ole tilastollisesti merkitsevää eroa. Kuitenkin on huomioitava, että matematiikkaklinikkalaiset suoriutuivat perustaitojen testistä heikommin kuin muut opiskelijat ja tämän lisäksi toisen kurssin aikana mukaan tulleiden opiskelijoiden opintomenestys kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä oli huonompi verrattuna muihin opiskelijoihin keskiarvolla mitattuna. Matematiikkaklinikkalaisista 4,9 prosenttia ei läpäissyt kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäistä koetta, kun taas muista opiskelijoista 10,2 prosenttia sai arvosanaksi nollan. Keskiarvolla ja läpäisyprosentilla mitattuna pienryhmiin osallistuneet opiskelijat menestyivät paremmin kyseisessä tentissä, vaikka lähtötasoltaan he olivat muita opiskelijoita heikompia.

Opiskelijoiden, jotka tulivat pienryhmätoimintaan mukaan toisen kurssin alkaessa, keskiarvo kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä oli 1,58, jolloin he eivät siis vielä opiskelleet matematiikkaklinikalla. Näistä henkilöistä 45 prosenttia (14 opiskelijaa) oli saanut arvosanaksi nollan kyseisessä tentissä. Vastaavasti muiden kuin klinikkalaisten keskiarvoksi samaisessa tentissä muodostui 1,97, ja 37 prosenttia opiskelijoista oli saanut arvosanaksi nollan. Näiden tietojen perusteella voimme päätellä, että kyseiset matematiikkaklinikkalaiset menestyivät heikommin kurssin Insinöörimatematiikka 1 ensimmäisessä tentissä niin keskiarvolla kuin läpipääsyprosentilla mitattuna. Pienryhmätoimintaan osallistumisen jälkeen näistä opiskelijoista vain 3,6 prosenttia (1 opiskelija) ei läpäissyt kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäistä tenttiä ja heidän keskiarvoksi muodostui 3,36. Muiden opiskelijoiden keskiarvoksi kyseisessä tentissä tuli 3,09, jolloin koetta ei läpäissyt 10,2 prosenttia opiskelijoista. Lukujen perusteella kyseiset matematiikkaklinikkalaiset menestyivät paremmin kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäisessä tentissä sekä keskiarvon että läpipääsyprosentin näkökulmasta. Kyseiset matematiikkaklinikkalaiset olivat siis lähtötasoltaan muita opiskelijoita heikompia, mutta pienryhmätoiminnan jälkeen heidän opintomenestyksensä oli muita samaa kurssia suorittavia opiskelijoita parempi keskiarvon ja läpipääsyprosentin perusteella.

Kurssiarvosanojen vertailu tukee myös omalta osaltaan matematiikkaklinikan tapaisen pienryhmätoiminnan tärkeyttä matematiikan opinnoista suoriutumisen näkökulmasta. Saadut tulokset osoittavat, että toiminnalla on ollut vaikutusta opiskelijoiden menestymiseen matematiikan kursseilla. Pienryhmissä opiskelu on auttanut tenttien läpipääsyprosenttien kasvattamisessa tutkittujen opiskelijoiden joukossa verrattuna muihin samaa kurssia suorittaviin opiskelijoihin. Luotettavampien tulosten saamiseksi toimintaa tulisi jatkaa siten, että opiskelijoiden matematiikan opinnoissa menestymistä ja ajatuksia matematiikkaa kohtaan seurattaisiin pitempikestoisen opetuskokeilun avulla. Saadut tulokset ovat suuntaa antavia, mutta puoltavat vahvasti pienryhmätoiminnan tärkeyttä.

LÄHTEET

Adler, B. (2001). *What is dyscalculia?* Haettu 26. elokuuta 2009 osoitteesta http://www.dyscalculiainfo.org/

Ahonen, T.;& Räsänen, p. (1995). Matemaattiset oppimisvaikeudet. Teoksessa H. Lyytinen;T. Ahonen;T. Korhonen;M. Korkman;& T. Riita, *Oppimisvaikeudet - neuropsykologinen näkökulma* (ss. 209-246). Juva: Wsoy.

Badian, N. (1983). Arithmetic and non-verbal learning. Teoksessa H. R. Myklebust, *Progress in learning disabilities* (ss. 235-264). New York: Grune and Stratton.

Biggs, J. (1979). Individual differences in study processes and the Quality of Learning Outcomes. *Higher Education, vol.8* , 381-394.

Bloom, B. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals, Handbook l: Cognitive Domain.* New York: Longman Green.

Checkley, K. (5. lokakuuta 2007). *The First Seven. . . and the Eighth: A Conversation with Howard Gardner.* Haettu 5. helmikuuta 2010 osoitteesta http://nnrec.org/profdev /plt/handouts/FirstSevenAndEighth.pdf

CIMT. (18. elokuuta 2005). *Kassel Project, Year 3 - Progress report*. Haettu 15. tammikuuta 2010 osoitteesta Centre for Innovation in Mathematics Teaching: http:// www.cimt.plymouth.ac.uk/projects/kassel/inter.htm

Gardner, H. (21. lokakuuta 2009). *Selected papers and C.V.* Haettu 5. helmikuuta 2010 osoitteesta Howard Gardner: http://www.howardgardner.com/Papers/papers.html

Garnett, K. (1998). Math Learning Disabilities. *Learning Disabilities Journal* .

Gross-Tsur, V.;Manor, O.;& Shalev, R. S. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features. *Developmental Medicine and Child Neurology, vol.37* , 906-914.

Haapasalo, L. (2003). The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa? Teoksessa L. Haapasalo;& K. Sormunen, *Towards Meaningful Mathematics and Science Education, Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association* (ss. 1-20). Joensuun yliopisto 86.

Harrison, M. C. (2008). *Mathematics Support for Engineering Undergraduates.* Loughborough: Loughborough University/Mathematics Education Centre.

Heikkilä, T. (2002). *Tilastollinen tutkimus.* Helsinki: Edita.

Huikkola, M.;Silius, K.;& Pohjolainen, S. (2008). Clustering and achievement of engineering students based on their attitudes, orientations, motivations and intentions. *WSEAS TRANSACTIONS on ADVANCES in ENGINEERING EDUCATION, Issue 5, Volume 5* , 342-354.

Joutsenlahti, J. (2004). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa P. Räsänen;P. Kupari;T. Ahonen;& P. Malinen, *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 363-380). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä, 1990-luvun pitkä matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä.* Tampere: Tampere University Press.

Kilpatrick, J.;Swafford, J.;& Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Laininen, P. (1998). *Todennäköisyys ja sen tilastollinen soveltaminen.* Helsinki: Valopaino Oy.

LTSN MathsTEAM Project. (14. lokakuuta 2003). *Maths support for students.* Haettu 26. helmikuuta 2010 osoitteesta http://ltsn.mathstore.ac.uk/mathsteam/packs/student_support.pdf

Melis, E. (18. lokakuuta 2006). *Erroneous examples as a source of learning in mathematics.* Haettu 3. maaliskuuta 2010 osoitteesta http://www.activemath.org/pubs/Melis-Erroneous-CELDA04-2004.pdf

Merrill, D. M. (2001). *First Principles of Instruction.* Educational Technology Research & Development.

Metsämuuronen, J. (2003). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä, 2. uudistettu painos.* Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

NAGB. (1999). *Mathematics Framework for the 1996 and 2000 National Assessment of Educational Progress. NAEP Mathematics Consensus Project.* Washington, DC.: National Assessment Governing Board.

NCISLA. (2000). *Building a Foundation for Learning Algebra in the Elementary Grades.* Madison, Wisconsin: National Center for Improving Student Learning & Achievement in Mathematics & Science.

Niilo Mäki Instituutti. (13. elokuuta 2009). *Kuinka yleisiä ovat matemaattiset oppimisvaikeudet?* Haettu 18. tammikuuta 2010 osoitteesta Tietoverkkovälitteinen peruslaskutaidon sekä matematiikan oppimisvaikeuksien oppimis- ja arviointiympäristö: http://www.lukimat.fi/matematiikka/Vanhemmalle/matemaattiset-oppimisvaikeudet/kuinka-yleisia-ovat-matemaattiset-oppimisvaikeudet

Niilo Mäki Instituutti. (3. syyskuuta 2009). *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. Haettu 18. tammikuuta 2010 osoitteesta Tietoverkkovälitteinen peruslaskutaidon sekä matematiikan oppimisvaikeuksien oppimis- ja arviointiympäristö: http://www.lukimat.fi/matematiikka/Vanhemmalle/matemaattiset-oppimisvaikeudet

Näveri, L. (2009). *Aritmetiikasta algebraan, Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana.* Väitöskirja, Helsinki: Yliopistopaino.

OECD. (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006.* Organisation for Economic Co-operation and Development.

Parson, S. (2005). Success in engineering mathematics... through maths support and changes to engineering maths lectures at Harper Adams. *MSOR Connections, vol 5, No 1* .

Perttula, A.;Vattulainen, K.;& Suurhasko, T. (19. lokakuuta 2009). *Todennäköisyyslaskenta.* Haettu 11. helmikuuta 2010 osoitteesta MAT-20500 Todennäköisyyslaskenta: http://www.math.tut.fi/courses/MAT-20500/tnlmoniste.pdf

Pohjavirta, A.;& Ruohonen, K. (11. lokakuuta 2005). *Laaja tilastomatematiikka.* Haettu 16. helmikuuta 2010 osoitteesta MAT-33310 Tilastomatematiikka: http://math.tut.fi/~ruohonen/LTM.pdf

Riding, R. J.;& Sadler-Smith, E. (1997). Cognitive style and learning strategies: some implications for training design. *International Journal of Training and Development* , 199-208.

Rousselle, L.;& Noël, M.-P. (2007). Basic numerical skills in children mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition, vol.102* , 361-395.

Ruohonen, K. (29. huhtikuuta 2009). *Tilastomatematiikka.* Haettu 11. helmikuuta 2010 osoitteesta MAT-33310 Tilastomatematiikka: http://math.tut.fi/~ruohonen/TM.pdf

Schneider, M.;& Stern, E. (2005). Conceptual and procedural knowledge of a mathematics problem: Their measurement and their causal interrelations. *The 27th Annual Meeting of the Cognitive Science Society (CSS).* Stresa, Italy.

Shalev, R. S. (2004). Developmental Dyscalculia. *Journal of Child Neurology, vol.19* , 766-773.

Shalev, R. S.;Manor, O.;Kerem, B.;Ayali, M.;Badichi, N.;Friedlander, Y.;ym. (2001). Developmental Dyscalculia Is a Familial Learning Disability. *Journal of Learning Disabilities, vol.34* , 59-65.

Shier, R. (22. helmikuuta 2007). *Statistics: 2.3 The Mann-Whitney U Test.* Haettu 17. helmikuuta 2010 osoitteesta Mathematics Learning Support Centre: http://mlsc.lboro. ac.uk/resources/statistics/Mannwhitney.pdf

TTY-Piiri. (29. maaliskuuta 2010). Noudettu osoitteesta http://www.tut.fi/piiri

Ullrich, C. (2003). *Pedagogical Rules in ActiveMath and their Pedagogical Foundations.*

University of Western Ontario. (26. September 2008). *Unraveling 'Math Dyslexia'.* Haettu 11. elokuuta 2009 osoitteesta ScienceDaily: http://www.sciencedaily.com /releases/2008/09/080924151007.htm

Uusitalo, H. (1997). *Tiede, tutkimus ja tutkielma. Johdatus tutkielman maailmaan.* Helsinki: WSOY.

Yrjönsuuri, R. (2002). *Opit kun haluat, matematiikkaa ja yhteistyötä.* Hamina: Oy Kotkan Kirjapaino Ab. 2.painos. s.140-143.

LIITE A

Kyselylomake: Matematiikkaklinikka

MATEMATIIKKAKLINIKAN TOIMINTA, syksy 2009

Vastaa valitsemalla sopiva vaihtoehto tai kirjoittamalla vastauksesi annettuun kenttään

Sukupuoli

- ☐ Mies
- ☐ Nainen

Koulutusohjelma

- ☐ Arkkitehtuuri
- ☐ Automaatiotekniikka
- ☐ Biotekniikka
- ☐ Konetekniikka
- ☐ Materiaalitekniikka
- ☐ Rakennustekniikka
- ☐ Sähkötekniikka
- ☐ Teknis-luonnontieteellinen
- ☐ Tekstiili- ja vaatetusala
- ☐ Tietoliikenne-elektroniikka
- ☐ Tietotekniikka
- ☐ Tietojohtaminen
- ☐ Tuotantotalous
- ☐ Ympäristö- ja energiatekniikka

Opintojen aloitusvuosi
(Vuosi, jolloin olit ensimmäisen kerran läsnä olevana opiskelijana)

____

Opiskelupaikka Tampereen teknillisellä yliopistolla

Vastaa valitsemalla sopiva vaihtoehto.

1. Mitä teit ennen opintojen aloittamista?
   - ☐ Tulin suoraan lukiosta tai toisen asteen koulusta opiskelemaan.
   - ☐ Opiskelin jossain toisessa yliopistossa tai ammattikorkeakoulussa.
   - ☐ Olin armeijassa
   - ☐ Pidin yhden tai useamman välivuoden (tein esimerkiksi töitä)
   - ☐ Muu, mikä?

2. Miten tulit opiskelemaan TTY:lle?
   - ☐ Paperivalinnan kautta
   - ☐ Paperivalinnan ja pääsykokeen kautta
   - ☐ Pääsykokeen kautta

   Jos osallistuit pääsykokeeseen, niin merkitse mitkä kokeet suoritit.
   - ☐ Matematiikan kokeen
   - ☐ Kemian kokeen
   - ☐ Fysiikan kokeen

Insinöörimatematiikan kurssit

Valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut

3.	huonot opetusjärjestelyt (esim. kurssien päällekkäisyys, ajankohdat, huonot tenttimahdollisuudet)	1	2	3	4
4.	työssäkäynti	1	2	3	4
5.	kurssin vaikeus	1	2	3	4
6.	epämotivoivalta tuntuva kurssi	1	2	3	4
7.	massakurssi	1	2	3	4
8.	opiskelutaitojen puute	1	2	3	4
9.	ajankäytön vaikeudet	1	2	3	4
10.	motivaation puute	1	2	3	4
11.	perhesyyt	1	2	3	4

12. luottamustoimet	1	2	3	4
13. terveydelliset syyt	1	2	3	4
14. muu, mikä?				

Matematiikan opiskelutavat

Pohdi omia matematiikan opiskelutapojasi ja valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto.

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

15. Käyn matematiikan luennoilla säännöllisesti.	1	2	3	4
16. Teen omia muistiinpanoja matematiikan luennoilla.	1	2	3	4
17. Kertaan tunnilla käydyn teorian ennen laskuharjoitustehtävien tekemistä.	1	2	3	4
18. Esimerkkitehtävät ovat tärkeitä laskuharjoitustehtäviä ratkaistaessa.	1	2	3	4
19. Lasken tehtäviä mieluummin kavereiden kanssa kuin yksin.	1	2	3	4
20. Minulla ei ole kavereita, joiden kanssa voisin laskea laskuharjoitustehtäviä.	1	2	3	4
21. Laskiessani tehtäviä en luovuta helpolla.	1	2	3	4
22. Epäonnistunut suoritus matematiikassa ei minua lannista, vaan harjoittelen lisää.	1	2	3	4

Vastaa valitsemalla sopivat vaihtoehdot.

23. Kuinka monta tuntia käytit viikoittain aikaa insinöörimatematiikan kurssin opiskeluun (pois lukien matematiikkajumppaan kulunut aika) keskimäärin?

- ☐ ajankäyttö opetukseen osallistumiseen
  - ☐ 0 – 2 h
  - ☐ 2 – 4 h
  - ☐ 4 – 6 h
  - ☐ 6 – 8 h
  - ☐ 8 – 10 h
- ☐ ajankäyttö itseopiskeluun
  - ☐ 0 – 2 h
  - ☐ 2 – 4 h
  - ☐ 4 – 6 h
  - ☐ 6 – 8 h
  - ☐ 8 – 10 h
  - ☐ yli 10 h

Matematiikan tärkeys ja merkitys opiskelijalle

Pohdi omia ajatuksiasi matematiikan tärkeydestä ja valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto.

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

24. Matematiikan tärkeys liittyy pelkästään tuleviin opintoihini	1	2	3	4
25. Matematiikan opiskeluni päämääränä ovat hyvät arvosanat	1	2	3	4

Kirjoita seuraavan kysymyksen vastaus annettuun kenttään.

26. Minkälaista on opiskella matematiikkaa? Minkälaisia tuntemuksia matematiikan opiskelu herättää?

____

____

____

____

Opiskelijan oma käsitys matematiikan osaamisestaan

Pohdi omaa käsitystäsi matematiikan osaamisestasi ja valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto.

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

27. Olen mielestäni hyvä matematiikassa	1	2	3	4
28. Minulla on puutteelliset koulumatematiikan (peruskoulu ja lukio) taidot	1	2	3	4
29. Pidin lukiomatematiikasta	1	2	3	4
30. Menestyin hyvin lukiomatematiikassa	1	2	3	4
31. Selviydyin lukiomatematiikasta pienellä työmäärällä, mutta silti menestyin siinä hyvin.	1	2	3	4

Kirjoita seuraavan kysymyksen vastaus annettuun kenttään.

32. Minkälainen on oma näkemyksesi matematiikan osaamisestasi (vahvuudet/heikkoudet)?

____

____

____

____

33. Kuinka monta vuotta sitten olet viimeksi opiskellut matematiikkaa?

Matematiikan oppimisvaikeudet

Pohdi seuraavia matematiikan oppimisvaikeuksiin liittyviä väittämiä. Valitse jokaiseen väittämään parhaiten mielipidettäsi kuvaava vaihtoehto.

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

34. Sekoitan välillä samalta näyttäviä lukuja (esim. 3 ja 8).	1	2	3	4
35. Minun on välillä vaikeaa hahmottaa lukujen välistä tyhjää tilaa.	1	2	3	4
36. Minulla on vaikeuksia karttojen, diagrammien tai taulukoiden lukemisessa.	1	2	3	4
37. Avaruudellinen hahmottaminen on vaikeaa.	1	2	3	4
38. Koen vaikeuksia kirjoittaa oikein lukuja, jotka sisältävät useamman numeron.	1	2	3	4
39. Minulla on vaikeuksia matemaattisten symbolien ymmärtämisessä (esimerkiksi ongelmallista muistaa, kuinka integraalimerkkiä pitäisi käyttää).	1	2	3	4
40. Minulla on vaikeuksia sanallisesti esitettyjen matemaattisten ongelmien ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa.	1	2	3	4
41. Koen vaikeaksi matemaattisen tehtävän eri kohtien seuraamisen (varsinkin jos tehtävä on pitkä).	1	2	3	4
42. Olen usein kykenemätön valitsemaan oikeaa strategiaa matemaattisen ongelman ratkaisussa.	1	2	3	4
43. Omaan hyvän matemaattisten käsitteiden ymmärryksen, mutta suoriudun laskemisesta ailahtelevasti.	1	2	3	4

Opiskelijan ajatuksia matematiikkaklinikasta

Valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

44. Olen ollut tyytyväinen matematiikkaklinikan toimintaan.	1	2	3	4

45. Olen kokenut matematiikkaklinikan hyödylliseksi.	1	2	3	4
46. Matematiikkaklinikalla käynti on auttanut minua matematiikan kurssien suorittamisessa.	1	2	3	4
47. Matematiikkaklinikalla käyminen on lisännyt matematiikan osaamistani.	1	2	3	4
48. Minun on helpompi kysyä neuvoa matematiikkaklinikalla kuin laskuharjoituksissa.	1	2	3	4
49. Mielestäni laskuharjoitusten pitäisi olla samanlaisia kuin matematiikkaklinikan tunnit.	1	2	3	4

Kirjoita seuraavan kysymyksen vastaus annettuun kenttään.

50. Onko matematiikkaklinikan myötä tapahtunut muutosta asenteessasi matematiikkaa kohtaan?

____

____

____

____

51. Miten toimintaa voisi kehittää?

____

____

____

____

52. Palautetta matematiikkaklinikan pitäjälle

____

____

____

____

LIITE B

Kyselylomake: Luentoryhmät

MATEMATIIKAN OPISKELU TAMPEREEN TEKNILLISELLÄ YLIOPISTOLLA

Vastaa valitsemalla sopiva vaihtoehto tai kirjoittamalla vastauksesi annettuun kenttään

Sukupuoli

- ☐ Mies
- ☐ Nainen

Koulutusohjelma

- ☐ Arkkitehtuuri
- ☐ Automaatiotekniikka
- ☐ Biotekniikka
- ☐ Konetekniikka
- ☐ Materiaalitekniikka
- ☐ Rakennustekniikka
- ☐ Sähkötekniikka
- ☐ Teknis-luonnontieteellinen
- ☐ Kuitu- ja tekstiilitekniikka
- ☐ Signaalinkäsittely ja tietoliikennetekniikka
- ☐ Tietotekniikka
- ☐ Tietojohtaminen
- ☐ Tuotantotalous
- ☐ Ympäristö- ja energiatekniikka

Opintojen aloitusvuosi

(Vuosi, jolloin olit ensimmäisen kerran läsnä olevana opiskelijana)

____

Opiskelupaikka Tampereen teknillisellä yliopistolla

Vastaa valitsemalla sopiva vaihtoehto.

1. Mitä teit ennen opintojen aloittamista?
   - ☐ Tulin suoraan lukiosta tai toisen asteen koulusta opiskelemaan.
   - ☐ Opiskelin jossain toisessa yliopistossa tai ammattikorkeakoulussa.
   - ☐ Olin armeijassa
   - ☐ Pidin yhden tai useamman välivuoden (tein esimerkiksi töitä)
   - ☐ Muu, mikä?

2. Miten tulit opiskelemaan TTY:lle?
   - ☐ Paperivalinnan kautta
   - ☐ Paperivalinnan ja pääsykokeen kautta
   - ☐ Pääsykokeen kautta

   Jos osallistuit pääsykokeeseen, niin merkitse mitkä kokeet suoritit.
   - ☐ Matematiikan kokeen
   - ☐ Kemian kokeen
   - ☐ Fysiikan kokeen

Insinöörimatematiikan kurssit

Valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

Olen saanut riittävästi infoa insinöörimatematiikan kurssien

3.	vastuuhenkilöistä	1	2	3	4
4.	sisällöistä	1	2	3	4
5.	suoritusvaatimuksista	1	2	3	4
6.	luennoista	1	2	3	4
7.	laskuharjoituksista	1	2	3	4
8.	ohjeiden ja vinkkien etsimisestä esim. TTY-Piiristä	1	2	3	4
9.	tukitoimista (esim. matematiikkaklinikasta)	1	2	3	4

Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut

10.	huonot opetusjärjestelyt (esim. kurssien päällekkäisyys, ajankohdat, huonot tenttimahdollisuudet)	1	2	3	4
11.	työssäkäynti	1	2	3	4
12.	kurssin vaikeus	1	2	3	4
13.	epämotivoivalta tuntuva kurssi	1	2	3	4
14.	massakurssi	1	2	3	4
15.	opiskelutaitojen puute	1	2	3	4
16.	ajankäytön vaikeudet	1	2	3	4
17.	motivaation puute	1	2	3	4
18.	perhesyyt	1	2	3	4
19.	luottamustoimet	1	2	3	4
20.	terveydelliset syyt	1	2	3	4
21.	muu, mikä?				

Vastaa valitsemalla sopivat vaihtoehdot.

22. Keneltä olet saanut apua matematiikan opiskelua koskevissa ongelmissa?
    - ☐ opiskelijatutorit
    - ☐ opettajat
    - ☐ opintoneuvojat
    - ☐ opiskelukaverit tai ystävät
    - ☐ perhe tai sukulaiset
    - ☐ matematiikkaklinikan pitäjä
    - ☐ TTY-Piiri

Matematiikan opiskelutavat

Pohdi omia matematiikan opiskelutapojasi ja valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto.

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

23.	Käyn matematiikan luennoilla säännöllisesti.	1	2	3	4
24.	Teen omia muistiinpanoja matematiikan luennoilla.	1	2	3	4
25.	Kertaan tunnilla käydyn teorian ennen laskuharjoitustehtävien tekemistä.	1	2	3	4

26. Esimerkkitehtävät ovat tärkeitä laskuharjoitustehtäviä ratkaistaessa.	1	2	3	4
27. Lasken tehtäviä mieluummin kavereiden kanssa kuin yksin.	1	2	3	4
28. Minulla ei ole kavereita, joiden kanssa voisin laskea lasku-harjoitustehtäviä.	1	2	3	4
29. Laskiessani tehtäviä en luovuta helpolla.	1	2	3	4
30. Epäonnistunut suoritus matematiikassa ei minua lannista, vaan harjoittelen lisää.	1	2	3	4

Vastaa valitsemalla sopivat vaihtoehdot.

31. Kuinka monta tuntia käytit viikoittain aikaa insinöörimatematiikan kurssin opiskeluun (pois lukien matematiikkajumppaan kulunut aika) keskimäärin?

- ☐ ajankäyttö opetukseen osallistumiseen
  - ☐ 0 – 2 h
  - ☐ 2 – 4 h
  - ☐ 4 – 6 h
  - ☐ 6 – 8 h
  - ☐ 8 – 10 h
- ☐ ajankäyttö itseopiskeluun
  - ☐ 0 – 2 h
  - ☐ 2 – 4 h
  - ☐ 4 – 6 h
  - ☐ 6 – 8 h
  - ☐ 8 – 10 h
  - ☐ yli 10 h

Kirjoita seuraavissa kysymyksissä vastauksesi annettuun kenttään.

32. Minkälaiset laskuharjoitukset tukevat parhaiten oppimistasi?

____

____

____

____

33. Jännitätkö laskuharjoituksia, esim. taululle joutumista?

____

____

34. Minkälaiset luennot tukevat parhaiten oppimistasi?

Oppimistyyli

35. Lue alla olevat oppimisprofiilien kuvaukset ja valitse profiili, joka parhaiten kuvaa matematiikan oppimistasi. Vastaa valitsemalla sopiva vaihtoehto.

- ☐ Kiinnostukseeni matematiikkaa kohtaan vaikuttaa enemmän koulutusohjelma kuin oma mielenkiinto. Lasken tehtävän usein samalla tavalla kuin se on esitetty kirjassa tai tunnilla, enkä yleensä mieti omaa menetelmää tehtävän ratkaisemiseksi. Kykenen oppimaan matematiikkaa kopioimalla esimerkkiratkaisuja kunhan pidän ajatuksen mukana.
- ☐ Opiskelen mielelläni matematiikkaa yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa ja laskiessani toivon, että saan neuvoa, jos en kykene itsenäisesti tehtävää ratkaisemaan. Kiinnitän huomiota esimerkkeihin ja koen, että matematiikan oppiminen on tarpeellista. Tehtäviä laskettaessa on mielestäni tärkeää saada oikea vastaus, vaikka joissakin kohdissa ratkaisua olisi virheitä. Pidän siitä, että yrittämisestä palkitaan.
- ☐ Opiskellessani matematiikkaa haluan, että minua opastetaan henkilökohtaisesti vaikeissa kohdissa. Opettajan antamat esimerkit ja opetustapa vaikuttavat paljon siihen, miten omaksun asian. En mielelläni sovella malliratkaisuja uusiin tehtäviin. Jätän vaikeat tehtävät tekemättä tai kesken. Matematiikan “kieli” vaikuttaa minusta vaikealta.
- ☐ Pystyn oppimaan matematiikkaa, jos koen tarvitsevani sitä. En laske tehtäviä mielelläni kavereiden kanssa, vaan opin parhaiten itsekseni pohtimalla. En myöskään tarvitse opettajan tukea oppimisessani. Laskutehtävien kopioiminen ei edistä oppimistani.
- ☐ Haluan oppia matematiikkaa syvällisesti, enkä halua opetella asioita ulkoa. Laskiessani vaikeaa tehtävää en luovuta helpolla, vaan yritän ratkaista sen. Pärjään mielestäni hyvin matematiikassa.

Matematiikan tärkeys ja merkitys opiskelijalle

Pohdi omia ajatuksiasi matematiikan tärkeydestä ja valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto.

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

36. Matematiikan tärkeys liittyy pelkästään tuleviin opintoihini	1	2	3	4
37. Matematiikan opiskeluni päämääränä ovat hyvät arvosanat	1	2	3	4

Kirjoita seuraavan kysymyksen vastaus annettuun kenttään.

38. Minkälaista on opiskella matematiikkaa? Minkälaisia tuntemuksia matematiikan opiskelu herättää?

____

____

____

____

Opiskelijan oma käsitys matematiikan osaamisestaan

Pohdi omaa käsitystäsi matematiikan osaamisestasi ja valitse mielipidettäsi parhaiten kuvaava vaihtoehto.

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

39.	Olen mielestäni hyvä matematiikassa	1	2	3	4
40.	Minulla on puutteelliset koulumatematiikan (peruskoulu ja lukio) taidot	1	2	3	4
41.	Pidin lukiomatematiikasta	1	2	3	4
42.	Menestyin hyvin lukiomatematiikassa	1	2	3	4
43.	Selviydyin lukiomatematiikasta pienellä työmäärällä, mutta silti menestyin siinä hyvin.	1	2	3	4

44. Minkälainen on oma näkemyksesi matematiikan osaamisestasi (vahvuudet/heikkoudet)?

____

____

____

____

45. Kuinka monta vuotta sitten olet viimeksi opiskellut matematiikkaa?

____

____

Matematiikan oppimisvaikeudet

Pohdi seuraavia matematiikan oppimisvaikeuksiin liittyviä väittämiä. Valitse jokaiseen väittämään parhaiten mielipidettäsi kuvaava vaihtoehto.

Vastausvaihtoehdot: 1 = täysin eri mieltä, 2 = osittain eri mieltä, 3 = osittain samaa mieltä, 4 = täysin samaa mieltä

46.	Sekoitan välillä samalta näyttäviä lukuja (esim. 3 ja 8).	1	2	3	4
47.	Minun on välillä vaikeaa hahmottaa lukujen välistä tyhjää tilaa.	1	2	3	4
48.	Minulla on vaikeuksia karttojen, diagrammien tai taulukoiden lukemisessa.	1	2	3	4
49.	Avaruudellinen hahmottaminen on vaikeaa.	1	2	3	4
50.	Koen vaikeuksia kirjoittaa oikein lukuja, jotka sisältävät useamman numeron.	1	2	3	4
51.	Minulla on vaikeuksia matemaattisten symbolien ymmärtämisessä (esimerkiksi ongelmallista muistaa, kuinka integraalimerkkiä pitäisi käyttää).	1	2	3	4
52.	Minulla on vaikeuksia sanallisesti esitettyjen matemaattisten ongelmien ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa.	1	2	3	4
53.	Koen vaikeaksi matemaattisen tehtävän eri kohtien seuraamisen (varsinkin jos tehtävä on pitkä).	1	2	3	4
54.	Olen usein kykenemätön valitsemaan oikeaa strategiaa matemaattisen ongelman ratkaisussa.	1	2	3	4
55.	Omaan hyvän matemaattisten käsitteiden ymmärryksen, mutta suoriudun laskemisesta ailahtelevasti.	1	2	3	4

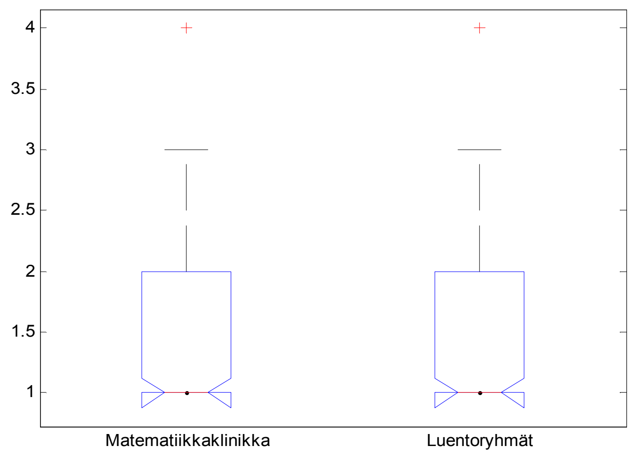
LIITE C

Monivalintakysymykset

Matematiikkaklinikan ja luentoryhmien opiskelijoille toteutettujen kyselyiden monivalintakysymysten vastausjakaumat, otoskeskiarvot ($\bar{x}$), mediaanit ($q_{0,5}$) ja otoskeskihajonnat (s) ovat esitetty alla. Tämän lisäksi vastauksia on visualisoitu boxplot-kuvaajien avulla. Kuvaajassa sinisen laatikon sisällä oleva punainen viiva kuvaa otosmediaania. Laatikon yläreuna kertoo otoksen yläkvartiilin arvon ($q_{0,75}$), ja alareuna ilmoittaa puolestaan alakvartiilin arvon ($q_{0,25}$). Mustien viiksien maksimipituus on w, jonka oletusarvo on 1,5. Punaisella rastilla merkitään poikkeavia havaintoja, jotka ovat suurempia kuin $q_{0,75} + w\left(q_{0,75} - q_{0,25}\right)$ tai pienempiä kuin $q_{0,25} - w\left(q_{0,75} - q_{0,25}\right)$. Piirretty viiksi ulottuu aineiston kauimmaiseen arvoon, joka ei ole vielä poikkeava havainto. Sinisissä laatikoissa oleva syvennys kuvaa otosmediaanin vaihtelevuutta. Syvennyksen leveys on määritetty siten, että kuvaajien mediaanit poikkeavat toisistaan 5 %:n merkitsevyystasolla, jos havaitut syvennykset eivät ole lainkaan päällekkäisiä. Syvennysten laskeminen perustuu oletukseen, että käsiteltävä aineisto on normaalisti jakautunut.

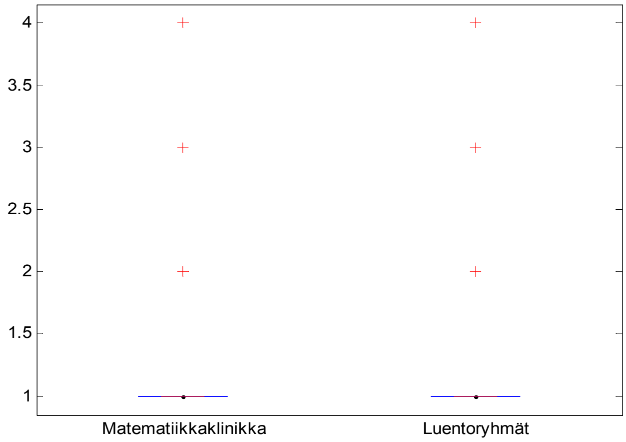
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut huonot opetusjärjestelyt (esim. kurssien päällekkäisyys, ajankohdat, huonot tenttimahdollisuudet)

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	19 (57,6 %)	10 (30,3 %)	3 (9,1 %)	1 (3,0 %)	1,5758	1	0,7918
Luentoryhmät	99 (57,6 %)	44 (25,6 %)	25 (14,5 %)	4 (2,3 %)	1,6163	1	0,8189



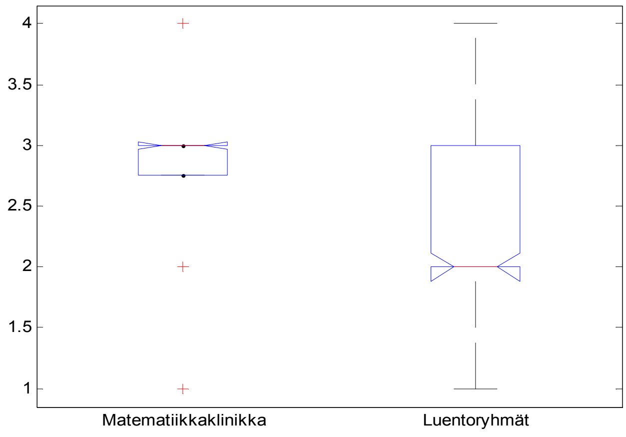
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut työssäkäynti

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	26 (78,8%)	3 (9,1%)	1 (3,0%)	3 (9,1%)	1,4242	1	0,9364
Luentoryhmät	155 (90,6%)	8 (4,7%)	4 (2,3%)	4 (2,3%)	1.1637	1	0,5709



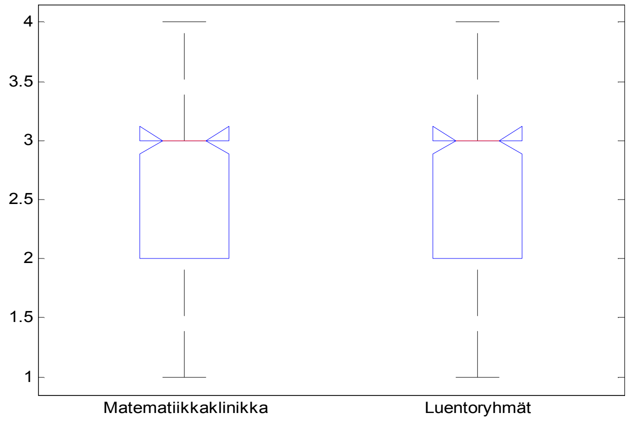
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut kurssin vaikeus

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	2 (6,1%)	6 (18,2%)	19 (57,6%)	6 (18,2%)	2,8788	3	0,7809
Luentoryhmät	22 (12,7%)	80 (46,2%)	59 (34,1%)	12 (6,9%)	2.3526	2	0,7905



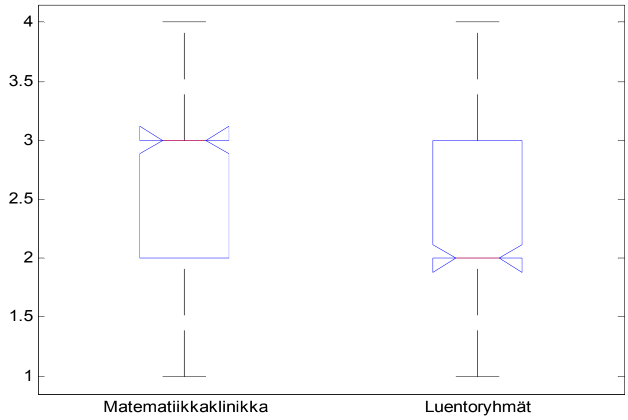
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut epämotivoivalta tuntuva kurssi

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	4 (11,8%)	6 (17,6%)	18 (52,9%)	6 (17,6%)	2,7647	3	0,8896
Luentoryhmät	13 (7,5%)	46 (26,6%)	87 (50,3%)	27 (15,6%)	2.7399	3	0,8116



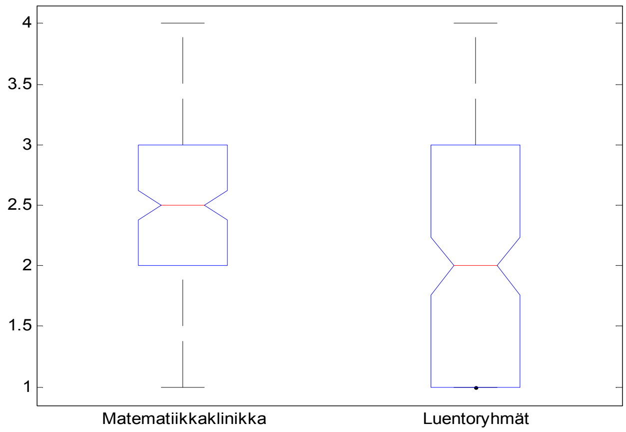
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut massakurssi

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	3 (8,8%)	10 (29,4%)	14 (41,2%)	7 (20,6%)	2,7353	3	0,8981
Luentoryhmät	42 (24,4%)	77 (44,8%)	38 (22,1%)	15 (8,7%)	2.1512	2	0,8920



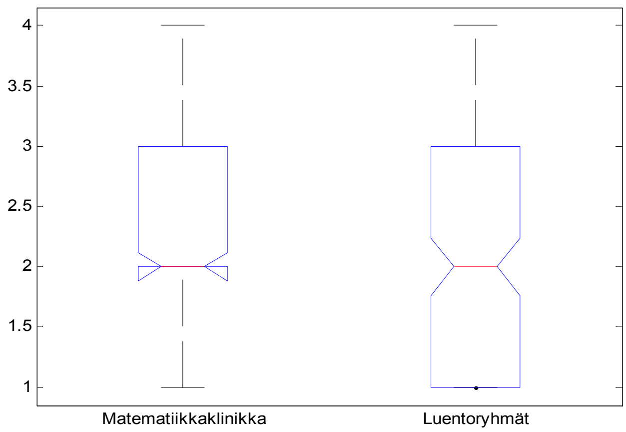
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut opiskelutaitojen puute

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	3 (8,8%)	14 (41,2%)	14 (41,2%)	3 (8,8%)	2,5000	2,5	0,7882
Luentoryhmät	57 (32,9%)	64 (37,0%)	47 (27,2%)	5 (2,9%)	2.0000	2	0,8491



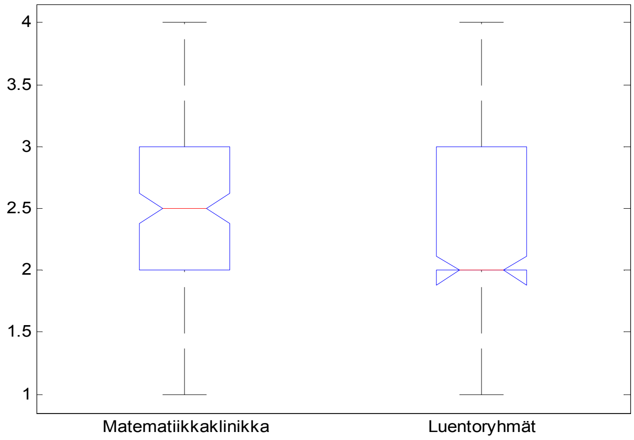
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut ajankäytön vaikeudet

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	5 (15,1%)	13 (39,4%)	9 (27,3%)	6 (18,2%)	2,4848	2	0,9722
Luentoryhmät	45 (26,0%)	57 (32,9%)	60 (34,7%)	11 (6,4%)	2.2139	2	0,9057



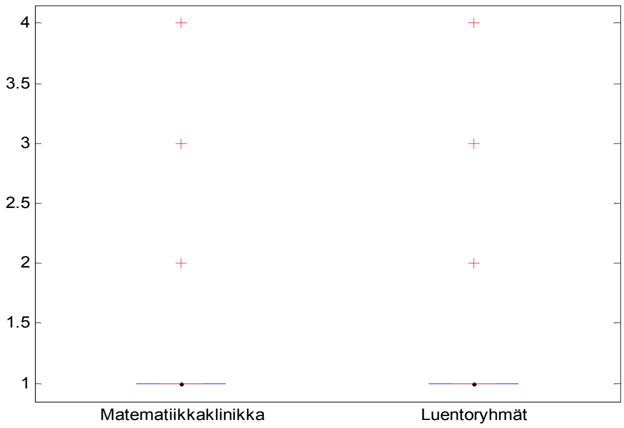
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut motivaation puute

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	3 (8,8%)	14 (41,2%)	11 (32,4%)	6 (17,6%)	2,5882	2,5	0,8916
Luentoryhmät	31 (17,9%)	61 (35,3%)	66 (38,2%)	15 (8,7%)	2.3757	2	0,8780



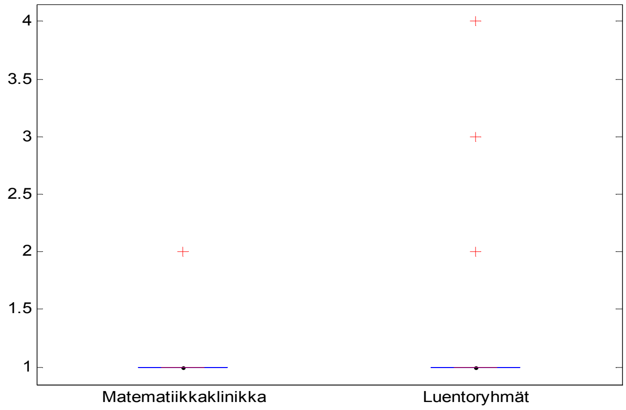
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut perhesyyt

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	28 (84,8%)	2 (6,1%)	1 (3,0%)	2 (6,1%)	1,3030	1	0,8095
Luentoryhmät	147 (86,0%)	19 (11,1%)	3 (1,8%)	2 (1,2%)	1.1813	1	0,5052



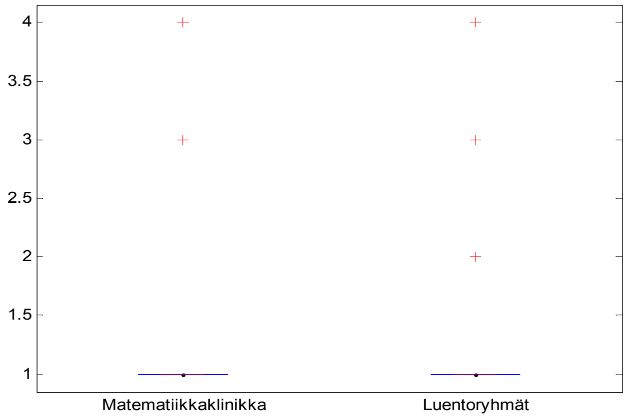
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut luottamustoimet

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	32 (97,0%)	1 (3,0%)	0 (0%)	0 (0%)	1,0303	1	0,1741
Luentoryhmät	152 (89,4%)	12 (7,1%)	4 (2,4%)	2 (1,2%)	1.1529	1	0,4987



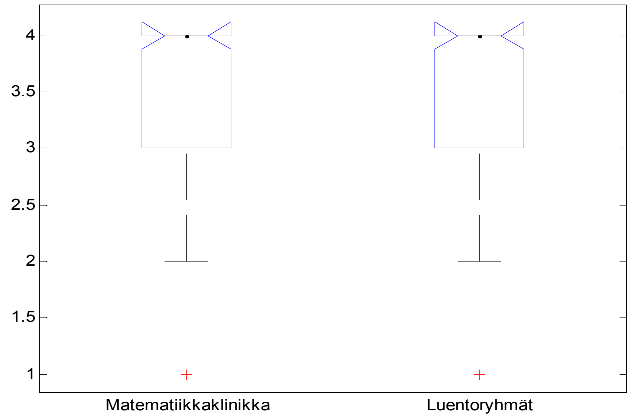
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut terveydelliset syyt

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	28 (87,5%)	0 (0%)	3 (9,4%)	1 (3,1%)	1.2813	1	0,7719
Luentoryhmät	152 (89,9%)	12 (7,1%)	3 (1,8%)	2 (1,2%)	1.1420	1	0,4793



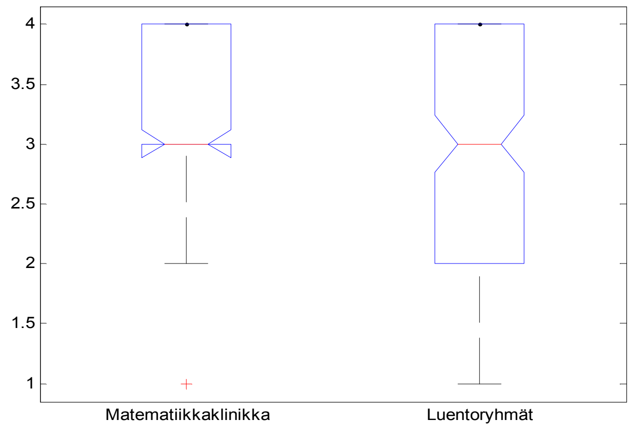
Käyn matematiikan luennoilla säännöllisesti.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	2 (5,9%)	2 (5,9%)	6 (17,6%)	24 (70,6%)	3.5294	4	0,8611
Luentoryhmät	5 (2,9%)	8 (4,7%)	32 (18,6%)	127 (73,8%)	3.6337	4	0,7089



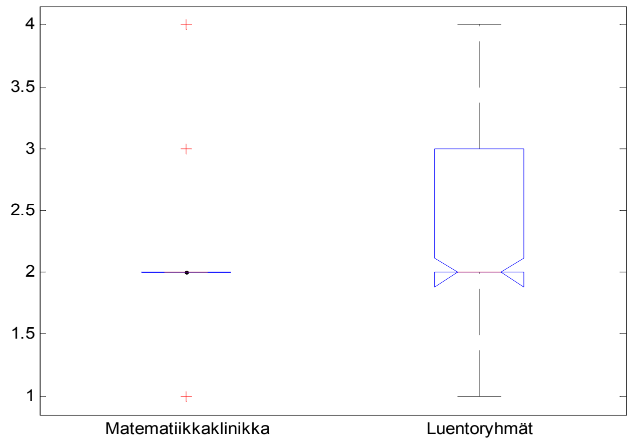
Teen omia muistiinpanoja matematiikan luennoilla.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	1 (2,9%)	6 (17,6%)	11 (32,4%)	16 (47,1%)	3.2353	3	0,8549
Luentoryhmät	13 (7,6%)	34 (19,8%)	49 (28,5%)	76 (44,2%)	3.0930	3	0,9688



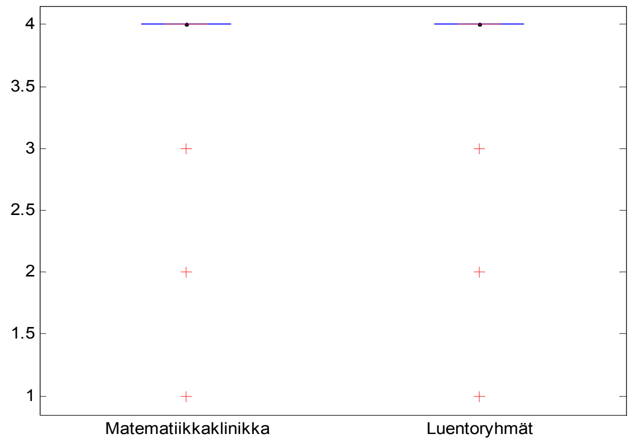
Kertaan tunnilla käydyn teorian ennen laskuharjoitustehtävien tekemistä.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	6 (17,6%)	21 (61,8%)	5 (14,7%)	2 (5,9%)	2.0882	2	0,7535
Luentoryhmät	17 (9,9%)	70 (40,7%)	61 (35,5%)	24 (14,0%)	2.5349	2	0,8543



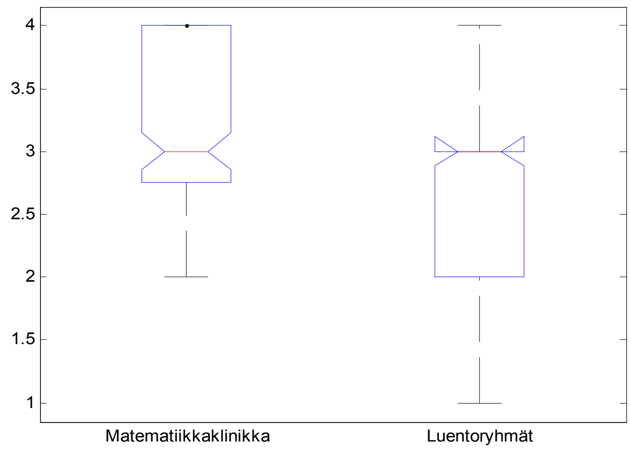
Esimerkkitehtävät ovat tärkeitä laskuharjoitustehtäviä ratkaistaessa.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	1 (3,0%)	4 (12,1%)	1 (3,0%)	27 (81,8%)	3.6364	4	0,8223
Luentoryhmät	2 (1,2%)	8 (4,7%)	22 (12,8%)	140 (81,4%)	3.7442	4	0,5960



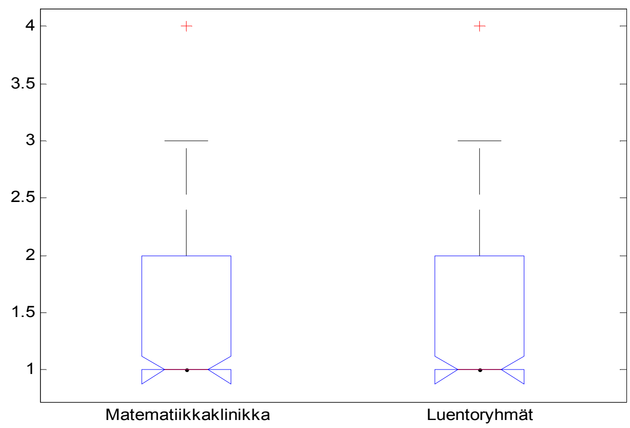
Lasken tehtäviä mieluummin kavereiden kanssa kuin yksin.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	0 (0%)	8 (24,2%)	13 (39,4%)	12 (36,4%)	3.1212	3	0,7809
Luentoryhmät	9 (5,3%)	54 (31,8%)	76 (44,7%)	31 (18,2%)	2.7588	3	0,8108



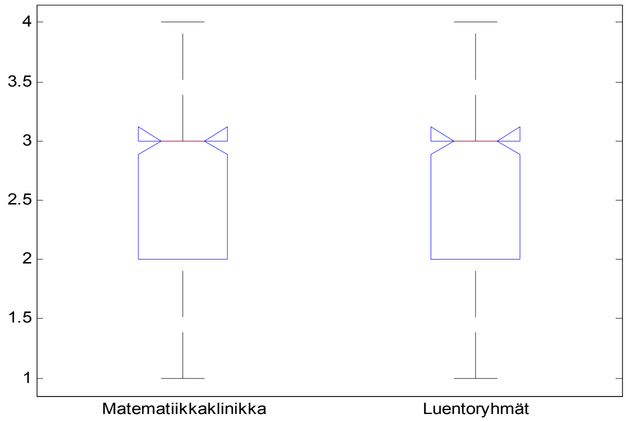
Minulla ei ole kavereita, joiden kanssa voisin laskea laskuharjoitustehtäviä.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	18 (54,5%)	10 (30,3%)	3 (9,1%)	2 (6,1%)	1.6667	1	0,8898
Luentoryhmät	119 (69,2%)	34 (19,8%)	13 (7,6%)	6 (3,5%)	1.4535	1	0,7822



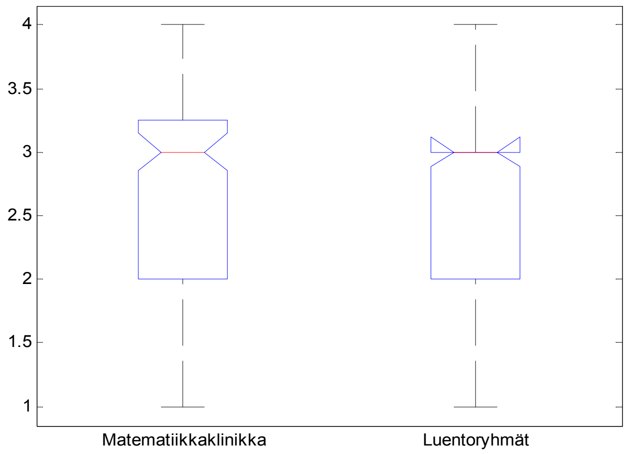
Laskiessani tehtäviä en luovuta helpolla.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	2 (6,1%)	11 (33,3%)	14 (42,4%)	6 (18,2%)	2.7273	3	0,8394
Luentoryhmät	8 (4,7%)	49 (28,5%)	76 (44,2%)	39 (22,7%)	2.8488	3	0,8239



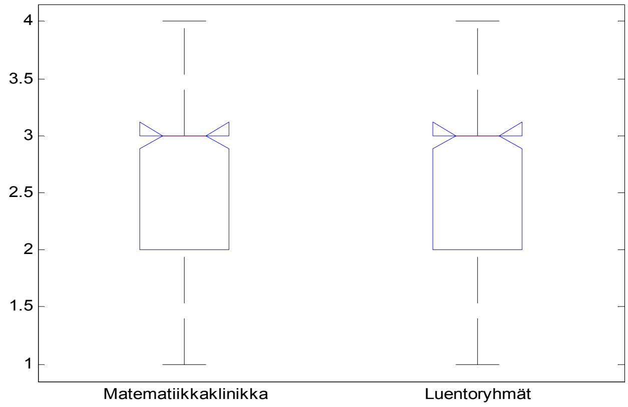
Epäonnistunut suoritus matematiikassa ei minua lannista, vaan harjoittelen lisää.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	1 (3,0%)	10 (30,3%)	14 (42,4%)	8 (24,2%)	2.8788	3	0,8200
Luentoryhmät	3 (1,8%)	47 (27,5%)	100 (58,5%)	21 (12,3%)	2.8129	3	0,6598



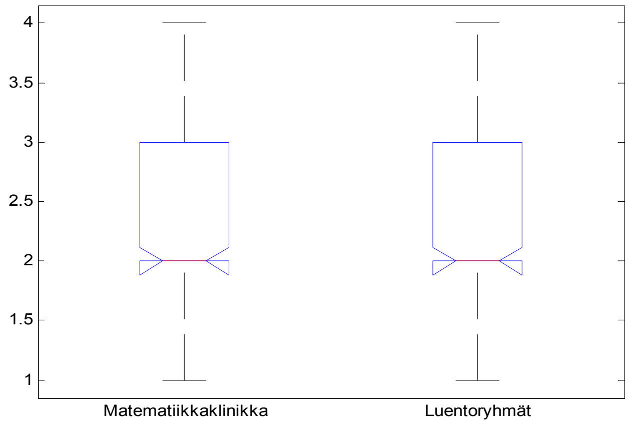
Matematiikan tärkeys liittyy pelkästään tuleviin opintoihini.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	1 (3,0%)	15 (45,5%)	13 (39,4%)	4 (12,1%)	2.6061	3	0,7475
Luentoryhmät	12 (7,2%)	58 (34,7%)	74 (44,3%)	23 (13,8%)	2.6467	3	0,8072



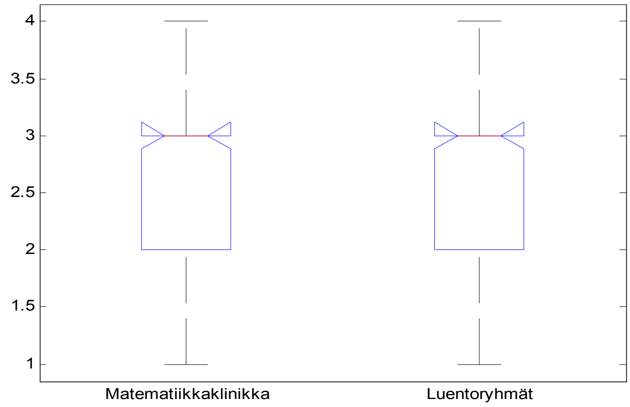
Matematiikan opiskeluni päämääränä ovat hyvät arvosanat.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	4 (12,1%)	19 (57,6%)	8 (24,2%)	2 (6,1%)	2.2424	2	0,7513
Luentoryhmät	18 (10,8%)	70 (42,2%)	70 (42,2%)	8 (4,8%)	2.4096	2	0,7473



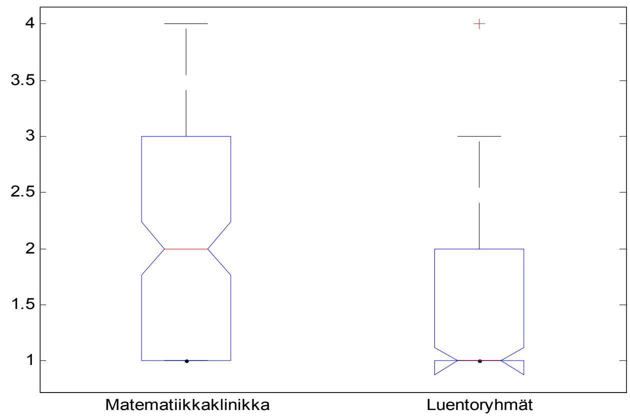
Olen mielestäni hyvä matematiikassa.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	2 (6,1%)	11 (33,3%)	18 (54,5%)	2 (6,1%)	2.6061	3	0,7044
Luentoryhmät	8 (4,8%)	41 (24,7%)	94 (56,6%)	23 (13,9%)	2.7952	3	0,7346



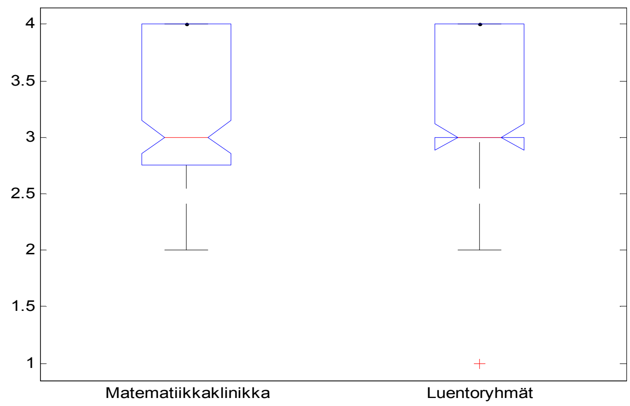
Minulla on puutteelliset koulumatematiikan (peruskoulu ja lukio) taidot.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	14 (42,4%)	7 21,2%)	7 (21,2%)	5 (15,2%)	2.0909	2	1,1282
Luentoryhmät	95 (56,9%)	46 (27,5%)	17 (10,2%)	9 (5,4%)	1.6407	1	0,8728



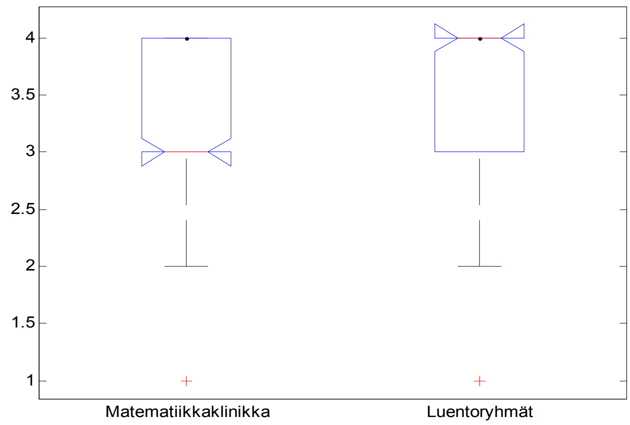
Pidin lukiomatematiikasta.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	0 (0%)	8 (24,2%)	11 (33,3%)	14 (42,4%)	3.1818	3	0,8083
Luentoryhmät	4 (2,4%)	15 (9,1%)	67 (40,6%)	79 (47,9%)	3.3394	3	0,7449



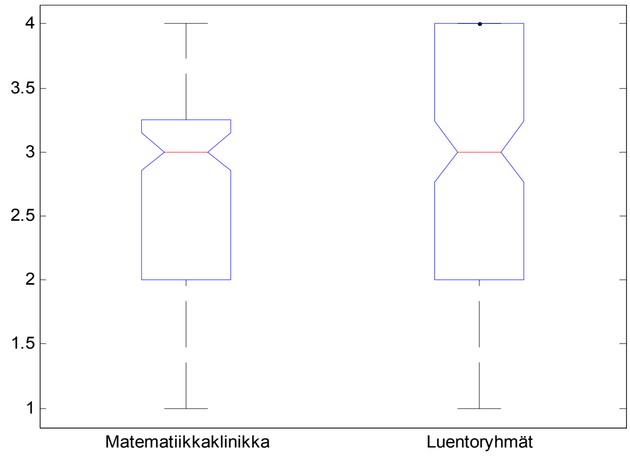
Menestyin hyvin lukiomatematiikassa.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	2 6,1%)	2 (6,1%)	18 (54,5%)	11 (33,3%)	3.1515	3	0,7953
Luentoryhmät	6 (3,6%)	11 (6,7%)	55 (33,3%)	93 (56,4%)	3.4242	4	0,7742



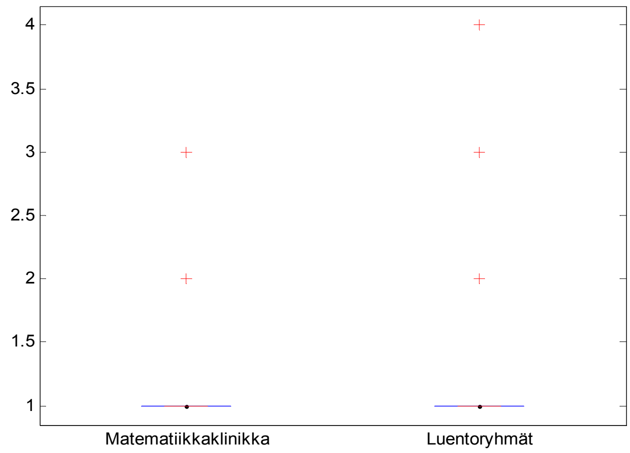
Selviydyin lukiomatematiikasta pienellä työmäärällä, mutta silti menestyin siinä hyvin.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	5 (15,2%)	9 (27,3%)	11 (33,3%)	8 (24,2%)	2.6667	3	1,0206
Luentoryhmät	10 (6,1%)	45 (27,3%)	65 (39,4%)	45 (27,3%)	2.8788	3	0,8820



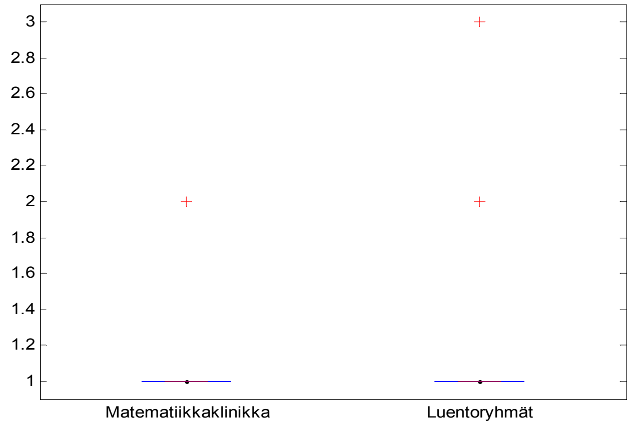
Sekoitan välillä samalta näyttäviä lukuja (esim. 3 ja 8).

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	29 (87,9%)	3 (9,1%)	1 (3,0%)	0 (0%)	1.1515	1	0,4417
Luentoryhmät	138 (83,6%)	19 (11,5%)	7 (4,2%)	1 (0,6%)	1.2134	1	0,5400



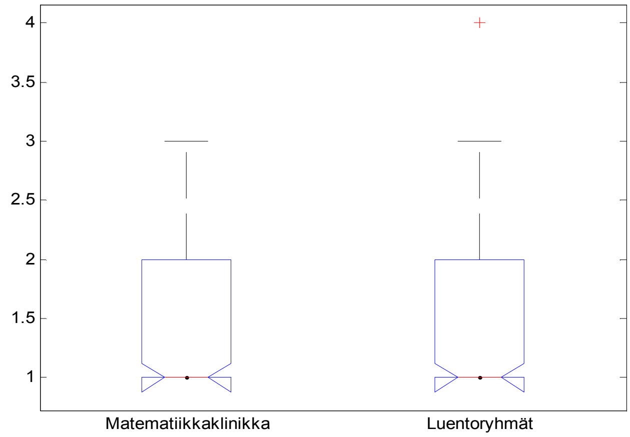
Minun on välillä vaikeaa hahmottaa lukujen välistä tyhjää tilaa.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	28 (84,8%)	5 (15,2%)	0 (0%)	0 (0%)	1.1515	1	0,3641
Luentoryhmät	139 (84,8%)	22 (13,4%)	3 (1,8%)	0 (0%)	1.1707	1	0,4234



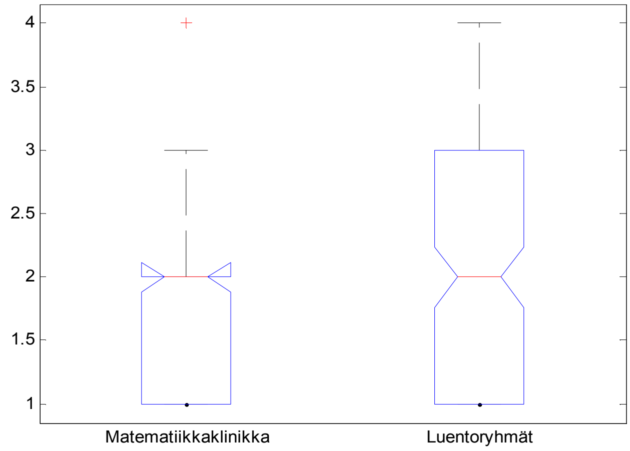
Minulla on vaikeuksia karttojen, diagrammien tai taulukoiden lukemisessa.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	22 (66,7%)	9 (27,3%)	2 (6,1%)	0 (0%)	1.3939	1	0,6093
Luentoryhmät	112 (68,3%)	44 (26,8%)	7 (4,3%)	1 (0,6%)	1.3720	1	0,5981



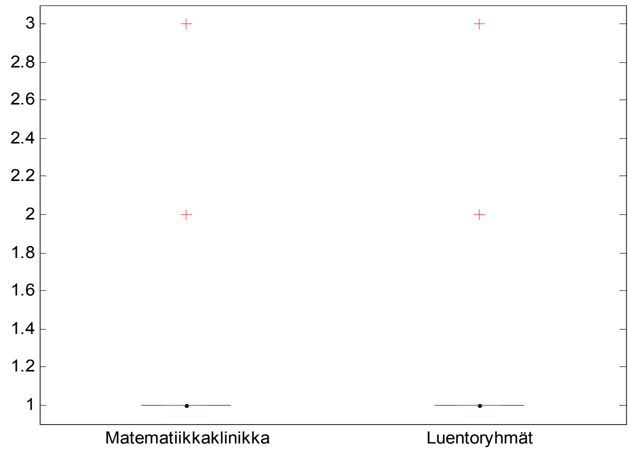
Avaruudellinen hahmottaminen on vaikeaa.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	11 (33,3%)	16 (48,5%)	4 (12,1%)	2 (6,1%)	1.9091	2	0,8427
Luentoryhmät	59 (36,0%)	59 (36,0%)	41 (25,0%)	5 (3,0%)	1.9512	2	0,8566



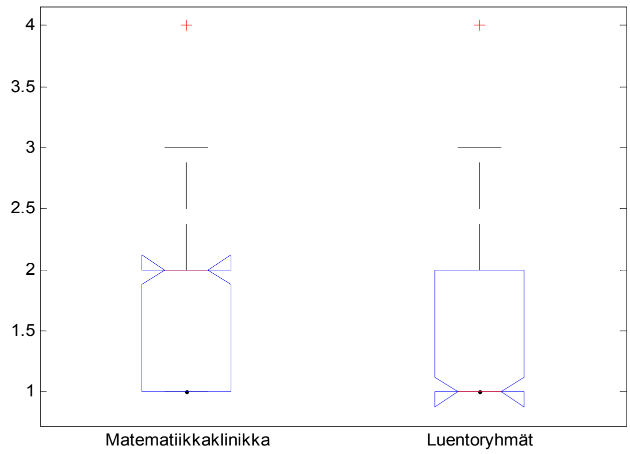
Koen vaikeuksia kirjoittaa oikein lukuja, jotka sisältävät useamman numeron.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	29 (87,9%)	3 (9,1%)	1 (3,0%)	0 (0%)	1.1515	1	0,4417
Luentoryhmät	141 (86,0%)	19 (11,6%)	4 (2,4%)	0 (0%)	1.1646	1	0,4330



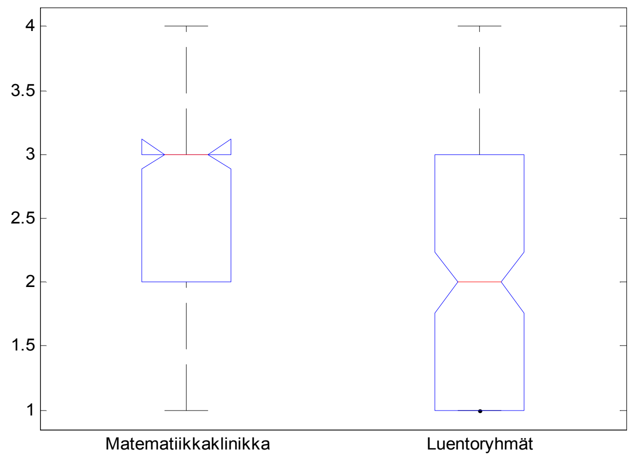
Minulla on vaikeuksia matemaattisten symbolien ymmärtämisessä (esimerkiksi ongelmallista muistaa, kuinka integraalimerkkiä pitäisi käyttää).

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	13 (39,4%)	13 (39,4%)	5 (15,2%)	2 (6,1%)	1.8788	2	0,8929
Luentoryhmät	105 (64,0%)	39 (23,8%)	13 (7,9%)	7 (4,3%)	1.5244	1	0,8174



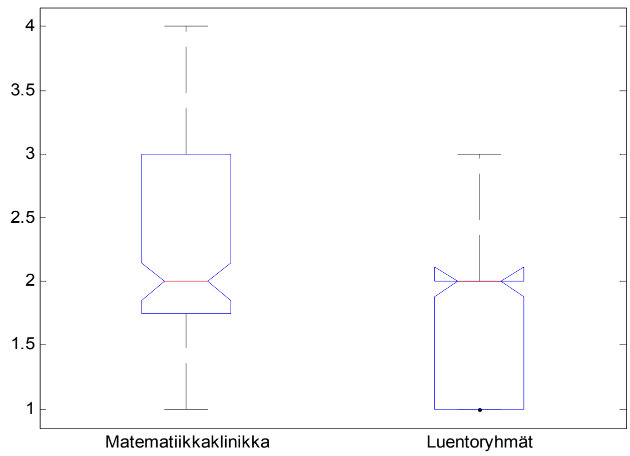
Minulla on vaikeuksia sanallisesti esitettyjen matemaattisten ongelmien ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	4 (12,1%)	12 (36,4%)	16 (48,5%)	1 (3,0%)	2.4242	3	0,7513
Luentoryhmät	49 (30,1%)	66 (40,5%)	42 (25,8%)	6 (3,7%)	2.0307	2	0,8420



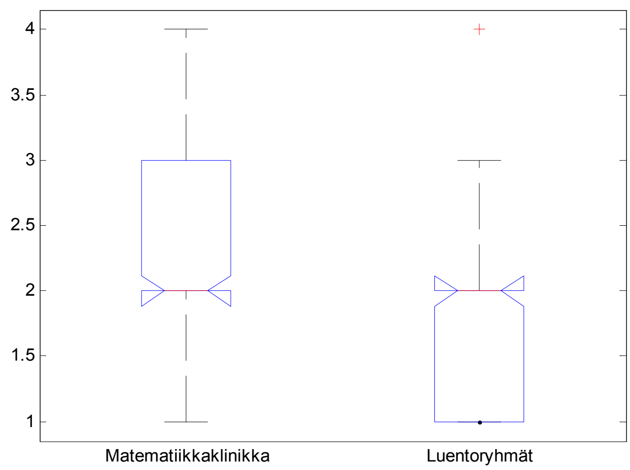
Koen vaikeaksi matemaattisen tehtävän eri kohtien seuraamisen (varsinkin jos tehtävä on pitkä).

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	8 (24,2%)	16 (48,5%)	8 (24,2%)	1 (3,0%)	2.0606	2	0,7882
Luentoryhmät	61 (37,7%)	72 (44,4%)	29 (17,9%)	0 (0%)	1.8025	2	0,7209



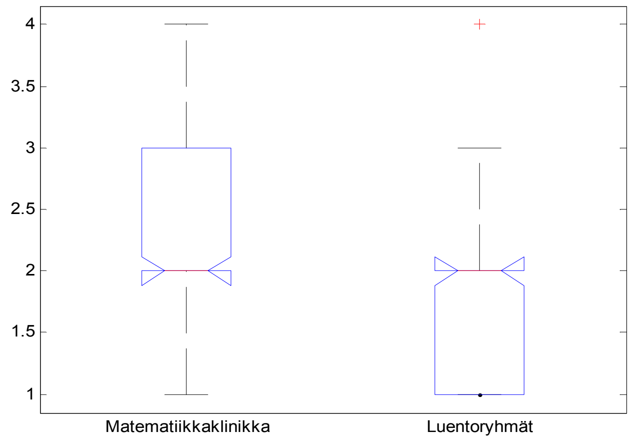
Olen usein kykenemätön valitsemaan oikeaa strategiaa matemaattisen ongelman ratkaisussa.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	4 (12,1%)	15 (45,5%)	9 (27,3%)	5 (15,2%)	2.4545	2	0,9045
Luentoryhmät	45 (27,6%)	86 (52,8%)	24 (14,7%)	8 (4,9%)	1.9693	2	0,7890



Omaan hyvän matemaattisten käsitteiden ymmärryksen, mutta suoriudun laskemisesta ailahtelevasti.

	täysin eri mieltä	osittain eri mieltä	osittain samaa mieltä	täysin samaa mieltä	$\bar{x}$	$q_{0,5}$	s
Matematiikkaklinikka	5 (15,2%)	18 (54,5%)	8 (24,2%)	2 (6,1%)	2.2121	2	0,7809
Luentoryhmät	41 (25,5%)	83 (51,6%)	36 (22,4%)	1 (0,6%)	1.9814	2	0,7113



LIITE D

Monivalintakysymysten ryhmäkeskiarvot ja *p-arvot*

Monivalintakysymysten keskiarvot ja *p-arvot* on esitetty alla olevassa taulukossa. *P-arvo* on laskettu käyttämällä ei-parametrista Mann-Whitneyn U-testiä.

	Matematiikkaklinikka	Luentoryhmät	*p-arvo* (U-testi)
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut huonot opetusjärjestelyt (esim. kurssien päällekkäisyys, ajankohdat, huonot tenttimahdollisuudet).	1,5758	1,6163	0.8554
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut työssäkäynti.	1,4242	1.1637	0.0448
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut kurssin vaikeus.	2,8788	2.3526	0.0004
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut epämotivoivalta tuntuva kurssi.	2,7647	2.7399	0.7276
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut massakurssi.	2,7353	2.1512	0.0006
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut opiskelutaitojen puute.	2,5000	2.0000	0.0022
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut ajankäytön vaikeudet.	2,4848	2.2139	0.1746
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut motivaation puute.	2,5882	2.3757	0.2690
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut perhesyyt.	1,3030	1.1813	0.7641

Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut luottamustoimet.	1,0303	1.1529	0.1690
Insinöörimatematiikan kurssin suorittamista on vaikeuttanut terveydelliset syyt.	1.2813	1.1420	0.5826
Käyn matematiikan luennoilla säännöllisesti.	3.5294	3.6337	0.6185
Teen omia muistiinpanoja matematiikan luennoilla.	3.2353	3.0930	0.5179
Kertaan tunnilla käydyn teorian ennen laskuharjoitustehtävien tekemistä.	2.0882	2.5349	0.0033
Esimerkkitehtävät ovat tärkeitä laskuharjoitustehtäviä ratkaistaessa.	3.6364	3.7442	0.8591
Lasken tehtäviä mieluummin kavereiden kanssa kuin yksin.	3.1212	2.7588	0.0248
Minulla ei ole kavereita, joiden kanssa voisin laskea laskuharjoitustehtäviä.	1.6667	1.4535	0.1150
Laskiessani tehtäviä en luovuta helpolla.	2.7273	2.8488	0.4381
Epäonnistunut suoritus matematiikassa ei minua lannista, vaan harjoittelen lisää.	2.8788	2.8129	0.6437
Matematiikan tärkeys liittyy pelkästään tuleviin opintoihini.	2.6061	2.6467	0.6687
Matematiikan opiskeluni päämääränä ovat hyvät arvosanat.	2.2424	2.4096	0.1639
Olen mielestäni hyvä matematiikassa.	2.6061	2.7952	0.1602
Minulla on puutteelliset koulumatematiikan (peruskoulu ja lukio) taidot.	2.0909	1.6407	0.0306
Pidin lukiomatematiikasta.	3.1818	3.3394	0.2815
Menestyin hyvin lukiomatematiikassa.	3.1515	3.4242	0.0290
Selviydyin lukiomatematiikasta pienellä työmäärällä, mutta silti menestyin siinä hyvin.	2.6667	2.8788	0.2904
Sekoitan välillä samalta näyttäviä lukuja (esim. 3 ja 8).	1.1515	1.2134	0.5771

Minun on välillä vaikeaa hahmottaa lukujen välistä tyhjää tilaa.	1.1515	1.1707	0.9593
Minulla on vaikeuksia karttojen, diagrammien tai taulukoiden lukemisessa.	1.3939	1.3720	0.8359
Avaruudellinen hahmottaminen on vaikeaa.	1.9091	1.9512	0.7547
Koen vaikeuksia kirjoittaa oikein lukuja, jotka sisältävät useamman numeron.	1.1515	1.1646	0.7899
Minulla on vaikeuksia matemaattisten symbolien ymmärtämisessä (esimerkiksi ongelmallista muistaa, kuinka integraalimerkkiä pitäisi käyttää).	1.8788	1.5244	0.0106
Minulla on vaikeuksia sanallisesti esitettyjen matemaattisten ongelmien ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa.	2.4242	2.0307	0.0095
Koen vaikeaksi matemaattisen tehtävän eri kohtien seuraamisen (varsinkin jos tehtävä on pitkä).	2.0606	1.8025	0.0895
Olen usein kykenemätön valitsemaan oikeaa strategiaa matemaattisen ongelman ratkaisussa.	2.4545	1.9693	0.0033
Omaan hyvän matemaattisten käsitteiden ymmärryksen, mutta suoriudun laskemisesta ailahtelevasti.	2.2121	1.9814	0.1487

LIITE E

Alla oleva taulukko sisältää tenttiarvosanojen jakaumat, keskiarvot ($\bar{x}$) ja keskihajonnat (s) sekä matematiikkaklinikkalaisille että vertailuryhmille. Tenttituloksia käsiteltäessä tutkimuksen vertailuryhminä toimivat sellaiset opiskelijat, jotka osallistuivat kyseisiin tentteihin, mutta eivät opiskelleet matematiikkaklinikalla. Lyhenteet IMA 1 ja IMA 2 tarkoittavat kursseja Insinöörimatematiikka 1 ja 2.

	Arvosana							
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\bar{x}$	s
IMA 1 / 1. tentti								
Mat.klinikka	3 (30,0%)	1 (10,0%)	3 (30,0%)	1 (10,0%)	0 (0%)	2 (20,0%)	2,00	1,89
Muut opiskelijat	257 (37,3%)	48 (7,0%)	111 (16,1%)	95 (13,8%)	91 (13,2%)	87 (12,6%)	1,97	1,84
IMA 1 / 2. tentti								
Mat.klinikka	2 (13,3%)	0 (0%)	2 (13,3%)	4 (26,7%)	3 (20,0%)	4 (26,7%)	3,20	1,66
Muut opiskelijat	86 (39,8%)	30 (13,9%)	40 (18,5%)	30 (13,9%)	16 (7,4%)	14 (6,5%)	1,55	1,60
IMA 2 / 1. tentti								
Mat.klinikka	2 (4,9%)	3 (7,3%)	10 (24,4%)	4 (9,8%)	7 (17,1%)	15 (36,6%)	3,37	1,59
Muut opiskelijat	64 (10,2%)	69 (11,0%)	89 (14,2%)	105 (16,8%)	120 (19,2%)	178 (28,5)	3,09	1,68

LIITE G

Alla olevassa taulukossa on esitelty yksityiskohtaisesti matematiikkaklinikan toiminnan aikataulu syksyllä 2009.

ma 7.9.	1. opetusperiodi alkaa
ti 8.9.	***Kurssi Insinöörimatematiikka 1 alkaa***
ti 22.9.	Luentovierailu kurssille Insinöörimatematiikka 1 (luentoryhmät A ja D): alka-van pienryhmätoiminnan esittely
ke 23.9.	Luentovierailu kurssille Insinöörimatematiikka 1 (luentoryhmä C): alkavan pienryhmätoiminnan esittely
to 24.9.	Luentovierailu kurssille Insinöörimatematiikka 1 (luentoryhmä B): alkavan pienryhmätoiminnan esittely Pienryhmätunnit klo 12-14 (luentoryhmä D)
ma 28.9.	Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä A)
ke 30.9.	Pienryhmätunnit klo 14-16 (luentoryhmä C)
pe 2.10.	Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä D)
ma 5.10.	Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä A)
ke 7.10.	Pienryhmätunnit klo 14-16 (luentoryhmä C)
pe 9.10.	Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä D)
ma 12.10.	Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä A)
ke 14.10.	Pienryhmätunnit klo 14-16 (luentoryhmä C)
ma 19.10.	Tenttiviikko alkaa
ke 21.10.	Kertaustunnit (2h): valmistaudutaan kurssin Insinöörimatematiikka 1 en-simmäiseen tenttiin tekemällä vanhoja tenttitehtäviä ja kertaamalla kurssin keskeisiä asioita
	Kurssin Insinöörimatematiikka 1 aikana matematiikkaklinikan toimintaan osallistui 12 opiskelijaa

ma 26.10.	2. opetusperiodi alkaa
ti 27.10.	***Kurssi Insinöörimatematiikka 2 alkaa:*** Kaikille kyseiseen kurssiin ilmoittautuneille lähetetään sähköpostia matematiikkaklinikan toiminnasta
pe 30.10.	Pienryhmätunnit klo 12-14 (luentoryhmä B)
ma 2.11.	Pienryhmätunnit klo 8-10 (luentoryhmä D) Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä A) Pienryhmätunnit klo 12-14 (luentoryhmä C)
pe 6.11.	Pienryhmätunnit klo 9-11 (luentoryhmä B)
ma 9.11.	Pienryhmätunnit klo 8-10 (luentoryhmä D) Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä A) Pienryhmätunnit klo 12-14 (luentoryhmä C)
ke 11.11.	Pienryhmätunnit klo 14-16 (luentoryhmä C)
pe 13.11.	Pienryhmätunnit klo 9-11 (luentoryhmä B)
ma 16.11.	Pienryhmätunnit klo 8-10 (luentoryhmä D) Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä A) Pienryhmätunnit klo 12-14 (luentoryhmä C)
ke 18.11.	Pienryhmätunnit klo 14-16 (luentoryhmä C)
pe 20.11.	Pienryhmätunnit klo 9-11 (luentoryhmä B)
ma 23.11.	Pienryhmätunnit klo 8-10 (luentoryhmä D) Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä A) Pienryhmätunnit klo 12-14 (luentoryhmä C)
ke 25.11.	Pienryhmätunnit klo 14-16 (luentoryhmä C)
pe 27.11.	Pienryhmätunnit klo 9-11 (luentoryhmä B)
ma 30.11.	Pienryhmätunnit klo 8-10 (luentoryhmä D) Pienryhmätunnit klo 10-12 (luentoryhmä A) Pienryhmätunnit klo 12-14 (luentoryhmä C)
ke 2.12.	Pienryhmätunnit klo 14-16 (luentoryhmä C)
to 3.12.	Kertaustunnit (luentoryhmä C) klo 12-14 : valmistaudutaan kurssin Insinöörimatematiikka 1 toiseen tenttiin tekemällä vanhoja tenttitehtäviä ja kertaamalla kurssin keskeisiä asioita

pe 4.12.	Kertaustunnit (luentoryhmä B klo 9-11 ja luentoryhmä A klo 11-13): valmistaudutaan kurssin Insinöörimatematiikka 1 toiseen tenttiin tekemällä vanhoja tenttitehtäviä ja kertaamalla kurssin keskeisiä asioita
ma 7.12.	Tenttiviikko alkaa
ti 15.12.	Kertaustunnit (luentoryhmä B klo 10-12): valmistaudutaan kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäiseen tenttiin tekemällä vanhoja tenttitehtäviä ja kertaamalla kurssin keskeisiä asioita
ke 16.12.	Kertaustunnit (luentoryhmä C klo 10-12 ja klo 12-14): valmistaudutaan kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäiseen tenttiin tekemällä vanhoja tenttitehtäviä ja kertaamalla kurssin keskeisiä asioita
to 17.12.	Kertaustunnit (luentoryhmä D klo 9-11 ja luentoryhmä A klo 12-14): valmistaudutaan kurssin Insinöörimatematiikka 2 ensimmäiseen tenttiin tekemällä vanhoja tenttitehtäviä ja kertaamalla kurssin keskeisiä asioita
	Kurssin Insinöörimatematiikka 2 aikana matematiikkaklinikan toimintaan osallistui 45 opiskelijaa